Université Mohamed Premier
Faculté Pluridisciplinaire -Nador
Département de Mathématiques

Corrigés du TD 4 – Probabilités

Correction 1

On a $G(s) = \sum_{n\geqslant 0} p_n s^n$, pour $|s| \leqslant 1$.

$Q(s) = \sum_{n\geqslant 0} q_n s^n$; qui existe pour tout $|s| < 1$ et $0 < q_n \leqslant 1$

1.
$$\begin{aligned}
(1-s)Q(s) &= \left(\sum_{n\geqslant 0} q_n s^n\right)(1-s) \\
&= \sum_{n\geqslant 0} q_n s^n - \left(\sum_{n\geqslant 0} q_n s^n\right) s \\
&= \sum_{n\geqslant 0} q_n s^n - \sum_{n\geqslant 0} q_n s^{n+1} \\
&= \sum_{n\geqslant 0} q_{n+1} s^{n+1} - \sum_{n\geqslant 0} q_n s^{n+1} + q_0 \\
&= \sum_{n\geqslant 0} (q_{n+1} - q_n) s^{n+1} + q_0
\end{aligned}$$

où

$q_{n+1} - q_n = \mathbb{P}(X > n+1) - P(X > n) = -\mathbb{P}(n < X \leqslant n+1) = -\mathbb{P}(X = n+1) = -p_{n+1}$

Donc
$$(1-s)Q(s) = q_0 - \sum_{n\geqslant 0} p_{n+1} s^{n+1} = 1 - G(s), (\text{ car } q_0 = 1 - p_0)$$

D'où le résultat.

2.
$$\mathbb{E}(X) = G'(1)$$
$$1 - (1-s)Q(s) = G(s)$$
$$G'(s) = -(1-s)Q'(s) + Q(s) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = Q(1)$$
$$G''(s) = -(1-s)Q''(s) + 2Q'(s) \Rightarrow G''(1) = 2Q'(1)$$

Par la suite

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}\left(X^2 - X\right) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 \\ &= 2Q'(1) + Q(1) - [Q(1)]^2\end{aligned}$$

Correction 2

Trouvons la fonction génératrice des moments sachant que les moments de la distribution sont données par $m_n = \dfrac{1}{n+1}$.

On sait que $M(s) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} m_n \frac{s^n}{n!}$

Donc

$$M(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{(n+1)n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{(n+1)!} = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n!} = \frac{1}{s}\left(e^s - 1\right).$$

Correction 3

1. Soit la fonction de densité définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

▶

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}dx = \frac{1}{(b-a)it}\left[e^{itx}\right]_a^b \\ &= \frac{e^{itb} - e^{ita}}{(b-a)it} = \frac{1}{(b-a)it}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\left(b^k - a^k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(it)^{k-1}}{k!}\frac{b^k - a^k}{b-a} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(it)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{b^k - a^k}{(b-a)k}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}$$

▶ Donc

$$m_n = \mathbb{E}\left(X^n\right) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}$$

- $$\begin{aligned} M(s) = \mathbb{E}\left(e^{sX}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{sx}dx \\ &= \frac{e^{sb}-e^{sa}}{s(b-a)} = \frac{1}{s(b-a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k}{k!}\left(b^k-a^k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\frac{b^k-a^k}{(b-a)k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(b-a)(n+1)} \end{aligned}$$

  On retrouve, ainsi,

  $$m_n = \mathbb{E}\left(X^n\right) = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}$$

- $$\begin{aligned} \mu_k &= \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^k\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{k} C_k^j(-1)^j(\mathbb{E}(X))^j X^{k-j}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} C_k^j(-1)^j m_1^j m_{k-j} \end{aligned}$$

2. Pour $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

- $$\begin{aligned} M(s) &= \mathbb{E}\left(e^{sX}\right), \text{ pour } |s| < 1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s^{sx} g(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{x(s-1)}dx = \frac{1}{s-1}\left[e^{x(s-1)}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1-s} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}n! \end{aligned}$$

- Donc $m_n = n!$.

▶

$$
\begin{aligned}
\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g(x)dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{x(it-1)}dx \\
&= \frac{1}{it-1}\left[e^{x(it-1)}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{1-it} = \frac{1+it}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{1+t^2} + i\frac{t}{1+t^2}.
\end{aligned}
$$

Pour $|t| \leqslant 1$, on a :

$$
\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} \text{ et } \frac{t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n+1}}{(2n+1)!}(2n+1)!
$$

Donc

$$
\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}(2n)!}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n+1}}{(2n+1)!}(2n+1)! = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} n! = \sum_{n=0}^{\infty} (it)^n
$$

Correction 4

Considérons la fonction $\varphi_X(t) = e^{-|t|}, \ \forall t \in \mathbb{R}$.
Comme cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est la fonction caractéristique d'une v.a.r. X de densité f, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-|t|} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-itx+t} dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-itx-t} dt \\
&= \left[\frac{e^{(1-ix)t}}{2\pi(1-ix)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{-e^{(1+ix)t}}{2\pi(1+ix)}\right]_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2\pi(1-ix)} + \frac{1}{2\pi(1+ix)} = \frac{1-ix+1+ix}{2\pi(1-ix)(1+ix)} \\
&= \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}
\end{aligned}
$$

Donc X suit une loi de Cauchy et φ_X est la fonction caractéristique associée à une loi de Cauchy.

Correction 5

1. La fonction de densité de $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}; -\infty < x < \infty; -\infty < \mu < \infty;\ \sigma > 0.$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(itx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu-it\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dx \\
&= \exp\left(it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0) = \mu;\ \mathbb{E}\left(X^2\right) = \sigma^2 + \mu^2$.
Les moments centrées d'ordre impair sont tous nuls.
Les moments centrées d'ordre pair sont :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X-\mu)^{2n} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2/2\sigma^2} dx;\ \left(n \in \mathbb{Z}^+\right) \\
&= \frac{\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}} 2^{n+\frac{1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \\
&= [(2n-1)(2n-3)\cdots 3.1]\sigma^2
\end{aligned}$$

2. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$
On a :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2};\ -\infty < x < \infty.$$

Donc :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2 - \frac{t^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

et par conséquent :

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{2k!} \frac{(2k)!}{2^k k!}$$

D'où $m_{2k+1} = 0$; pour $k = 0, 1, 2, \cdots$ et $m_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$; pour $k = 0, 1, 2, \cdots$
Retrouvons les moments d'une v.a. normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.
Soit X v.a. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Donc

$$m_n(Y) = \mathbb{E}\left(Y^n\right) = \frac{1}{\sigma^n}\mathbb{E}(X-\mu)^n = \frac{1}{\sigma^n}\mu_n(X)$$

D'où

$$\mu_n(X) = \sigma^n m_n(Y)$$

D'après ce qui précède, on a : $\mu_{2k+1} = \sigma^{2k+1} m_{2k+1}(Y) = 0,\ k = 0, 1, 2, \cdots$
et $\mu_{2k}(X) = \sigma^{2k} m_{2k}(Y) = \sigma^{2k}\dfrac{(2k)!}{2^k k!};\ k = 0, 1, 2, \cdots$

Correction 6

On remarque que $\overline{\varphi_X(t)} = \overline{\mathbb{E}\left[e^{itX}\right]} = \mathbb{E}\left[e^{-itX}\right] = \varphi_{-X}(t)$.
Donc $\varphi_X(t)$ est réelle si, et seulement si, $\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire si la loi de X est symétrique.

Correction 7

1. Soit X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$; alors

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = (1-p) + pe^{it}$$

2. Soit X qui suit une loi Binomiale de paramètres (n, p) ;
alors on peut écrire $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ où les Y_n sont des variables de Bernoulli de paramètre p, indépendantes.
Donc

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{it(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)}\right) = \left(\mathbb{E}\left(e^{itY_1}\right)\right)^n = \left[(1-p) + pe^{it}\right]^n$$

3. Soit X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ ; alors

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}}$$

4. Soit X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$; alors

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \int_0^{+\infty} e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

5. Soit X qui suit une loi exponentielle symétrique de paramètre λ
$\left(\text{i.e. de densité } f(x) = \dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}\right)$; alors, de même,

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \mathbb{E}\left(e^{itX}\right)\\ &= \int_0^{+\infty} e^{itx}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda x}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{itx}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda x}dx\\ &= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\lambda - it} + \frac{1}{\lambda + it}\right) = \frac{\lambda^2}{t^2+\lambda^2}\end{aligned}$$

6. Soit X qui suit une loi de Cauchy de paramètre λ, c'est-à-dire si X a pour densité $\dfrac{\lambda}{\pi\left(\lambda^2+x^2\right)}$.
   Avec la question précèdente, et en utilisant la formule d'inversion (de réciprocité) de Fourier (on a $\varphi_Y(t)=\hat{f}(t)$), on obtient que :
$$f(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(t)e^{ity}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ity}\frac{\lambda^2}{t^2+\lambda^2}dt=\frac{\lambda}{2}\mathbb{E}\left[e^{-iyX}\right]$$
   Comme X est symétrique, on a (voir exercice 6) $\mathbb{E}\left[e^{iyX}\right]=\mathbb{E}\left[e^{-iyX}\right]=f(y)$.
   On a donc, si $X\sim\mathcal{C}(\lambda),\ \phi_X(y)=e^{-\lambda|y|}$, pour tout $y\in\mathbb{R}$.

Correction 8

1. Pour appliquer la formule de réciprocité de Fourier, il faut que φ_1 soit absolument intégrable. Mais, elle ne l'est pas. Pour cela, on applique une autre méthode.
   On remarque que : $\varphi_1(t)=\exp\left(e^{it}-1\right)$, nous permet de dire que $X\sim\mathcal{P}(1)$, car
$$X\sim\mathcal{P}(\lambda)\Leftrightarrow\varphi_X(t)=\exp\left(\lambda\left(e^{it}-1\right)\right)$$
2. De même, $\varphi_2(t)=\left(\dfrac{1}{2}e^{it}+\dfrac{1}{2}\right)^4$, veut dire qu'il s'agit de la loi binomiale $\mathcal{B}\left(4,\frac{1}{2}\right)$, car
$$X\sim\mathcal{B}(n,p)\Leftrightarrow\varphi_X(t)=\left(pe^{it}+(1-p)\right)^n$$

Correction 9

1. Soit $X\sim\mathcal{B}(n,p)$ et $Y\sim\mathcal{B}(m,p)$, indépendantes, alors
$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=\left(pe^{it}+(1-p)\right)^n\left(pe^{it}+(1-p)\right)^m=\left(pe^{it}+(1-p)\right)^{n+m}$$
   et comme la fonction caractéristique caractérise la loi, $X+Y\sim\mathcal{B}(n+m,p)$.
2. Soit $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$ et $Y\sim\mathcal{P}(\mu)$, indépendantes, alors
$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}e^{\mu\left(e^{it}-1\right)}=e^{(\lambda+\mu)\left(e^{it}-1\right)}$$
   et comme la fonction caractéristique caractérise la loi, $X+Y\sim\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.
3. Soit $X\sim\mathcal{N}\left(m_1,\sigma_1\right)$ et $Y\sim\mathcal{N}\left(m_2,\sigma_2\right)$, indépendantes, alors
$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=e^{itm_1-\sigma_1^2t^2/2}e^{itm_2-\sigma_2^2t^2/2}=e^{it(m_1+m_2)-\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)t^2/2}$$
   et comme la fonction caractéristique caractérise la loi, $X+Y\sim\mathcal{N}\left(m_1+m_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$

4. Soit X et Y ont pour densités respectives f_X et f_Y, alors

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)e^{itx}dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v)e^{itv}dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)e^{it(x+v)}dx\right)dv\end{aligned}$$

On procède au changement de variable $u = x + v$;

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-v)e^{itu}du\right)dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v)f_X(u-v)dv\right)du\end{aligned}$$

On peut permuter les intégrales sans problème grâce au théorème de Fubini. Puisque la fonction caractéristique caractérise la loi de la v.a., on a donc pour $X+Y$ la densité

$$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v)f_X(u-v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(v)f_Y(u-v)dv$$