Université Mohamed Premier
Faculté Pluridisciplinaire -Nador
Département de Mathématiques

Corrigés du TD 5 – Probabilités

Correction 1

1. Les équivalences suivantes donnent :

$$(|X|-|Y|)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow X^2+Y^2-2|XY| \geqslant 0 \Leftrightarrow X^2+Y^2 \geqslant 2|XY| \geqslant |XY|$$

On en déduit que $\mathbb{E}(|XY|) \leqslant \mathbb{E}(X^2)+\mathbb{E}(Y^2)<\infty$, ainsi la v.a.r. XY est intégrable.
En choisissant $Y=\mathbb{1}_\Omega$ (c'est la variable aléatoire constante égale à 1),
on a $|XY|=|X| \leqslant X^2+\mathbb{1}_\Omega$ d'où

$$\mathbb{E}(|X|) \leqslant \mathbb{E}\left(X^2\right)+\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_\Omega\right)=\mathbb{E}\left(X^2\right)+1<\infty$$

On procède de même pour Y.

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqslant \mathbb{E}\left((X+\alpha Y)^2\right)=\alpha^2 \mathbb{E}\left(Y^2\right)+2 \alpha \mathbb{E}(XY)+\mathbb{E}\left(X^2\right)$$

Nous avons un polynôme en α de degré deux qui est positif. II ne peut donc pas avoir de racines réelles distinctes et son discriminant est donc négatif ou nul, c'est-à-dire $(\mathbb{E}(XY))^2-\mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(X^2) \leqslant 0$ d'où le résultat.

Correction 2

1. Pour tout $i=1,\ldots,n, X_i$ est de carré intégrable car $\mathbb{E}(|X|^2)<\infty$. On a

$$\begin{aligned}
Y^2 &= \sum_{i=1}^n X_i^2+\sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} X_i X_j \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n X_i^2+\sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n}\left|X_i X_j\right| \text{ ce qui entraîne} \\
\mathbb{E}\left(Y^2\right) &\leqslant \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(X_i^2\right)}_{<\infty}+\underbrace{\sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \mathbb{E}\left(\left|X_i X_j\right|\right)}_{<\infty \text{ d'après l'exercice 1, TD 5}}
\end{aligned}$$

d'où $\mathbb{E}(Y^2)<\infty$ ce qui prouve que $\displaystyle\sum_{k=1}^n X_i$ est de carré intégrable.

2. On a :

$$\operatorname{Var}(Y) = \mathbb{E}\left[(Y-\mathbb{E}(Y))^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mathbb{E}\left(X_i\right)\right)\right)^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{E}\left[\left(X_i-\mathbb{E}\left(X_i\right)\right)^2\right]}_{=\operatorname{Var}(X_i)} + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}\underbrace{\mathbb{E}\left[\left(X_i-\mathbb{E}\left(X_i\right)\right)\left(X_j-\mathbb{E}\left(X_j\right)\right)\right]}_{=\operatorname{Cov}(X_i,X_j)},$$

d'où le résultat en remarquant que

$$\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}\mathbb{E}\left[\left(X_i-\mathbb{E}\left(X_i\right)\right)\left(X_j-\mathbb{E}\left(X_j\right)\right)\right] = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbb{E}\left[\left(X_i-\mathbb{E}\left(X_i\right)\right)\left(X_j-\mathbb{E}\left(X_j\right)\right)\right]$$

car $\operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \operatorname{Cov}\left(X_j, X_i\right)$.

Correction 3

Remarquons que X et $-X$ ont la même loi. En effet l'étude des fonctions caractéristiques donne $\varphi_{-X}(t) = \mathbb{E}\left[e^{-itX}\right] = \varphi_X(-t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} = \varphi_X(t)$ pour tout réel t.

1. La relation

$$h(Y) = h(X)\mathbb{1}_{[0,\pi]}(|X|) + h(-X)\mathbb{1}_{]\pi,+\infty}(|X|)$$

est facile à vérifier. II suffit pour cela d'étudier séparément le cas où ω satisfait $|X(\omega)| \in [0,\pi]$ et le cas où ω satisfait $|X(\omega)| \in]\pi,+\infty[$. Pour observer que dans le premier cas, $h(Y(\omega)) = h(X(\omega))$ et dans le second cas $h(Y(\omega)) = h(-X(\omega))$. La relation avec les indicatrices sert à résumer ces deux cas en une seule expression.

2. Soient h une application borélienne positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de la relation

$$h(Y) = h(X)\mathbb{1}_{[0,\pi]}(|X|) + h(-X)\mathbb{1}_{]\pi,+\infty[}(|X|).$$

on obtient, en passant à l'espérance,

$$\mathbb{E}[h(Y)] = \mathbb{E}\left[h(X)\mathbb{1}_{[0,\pi]}(|X|)\right] + \mathbb{E}\left[h(-X)\mathbb{1}_{]\pi,+\infty}(|X|)\right]$$

En remarquant que X et $-X$ ont la même loi et en utilisant le théorème du transfert, il vient

$$\mathbb{E}\left[h(-X)\mathbb{1}_{]\pi,+\infty}(|X|)\right] = \mathbb{E}\left[h(X)\mathbb{1}_{]\pi,+\infty[}(|X|)\right].$$

Ce qui, en reportant dans le deuxième membre de l'égalité précédente,
donne $\mathbb{E}[h(Y)] = \mathbb{E}[h(X)]$, pour toute application borélienne positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ce qui prouve que Y suit la même loi que X c'est-à-dire $\mathcal{N}_1(0,1)$.

3. La variable aléatoire réelle $X+Y = 2X\mathbb{1}_{[0,\pi]}(|X|)$ n'est pas une gaussienne car $X+Y$ est une variable aléatoire bornée par 2π. Le vecteur (X,Y) n'est donc pas gaussien.

4. Si le couple (X,Y) était indépendant, le vecteur aléatoire (X,Y) serait gaussien car ses composantes seraient des variable aléatoire réelle gaussiennes indépendantes. D'après la question précédente, il y aurait contradiction. En conclusion, le couple (X,Y) n'est donc pas indépendant.

Correction 4

1. Z est de même loi que X, c'est à dire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Cela est dû au fait que la loi de X est symétrique, que Y est indépendante de X et ne prend que les valeurs 1 et -1. En effet, soit A un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \in A) &= \mathbb{P}(Z \in A \text{ et } Y = 1) + \mathbb{P}(Z \in A \text{ et } Y = -1)\\ &= \mathbb{P}(X \in A \text{ et } Y = 1) + \mathbb{P}(-X \in A \text{ et } Y = -1)\\ &= \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(-X \in A)\mathbb{P}(Y = -1)\\ &= p\mathbb{P}(X \in A) + (1-p)\mathbb{P}(-X \in A)\\ &= p\mathbb{P}(X \in A) + (1-p)\mathbb{P}(X \in A),\\ &= \mathbb{P}(X \in A).\end{aligned}$$

   Même si X et Z sont gaussiens, le couple (X, Z) n'est pas gaussien. Par exemple, on peut voir que $X + Z$ n'est pas gaussienne : lorsque Y vaut $-1, X + Z$ vaut zéro, et lorsque Y vaut $1, X + Z$ vaut $2X$. Donc $X + Z$ est une variable qui vaut 0 avec probabilité 1/2, ce qui n'est jamais le cas d'une gaussienne. Comme $X + Z$ n'est pas gaussienne, le couple (X, Z) n'est pas gaussien.

2. On peut remarquer que $\mathbb{E}[(XZ)^2] = \mathbb{E}[X^4]$. Or, $\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[X^2]^2$. Donc :

$$\mathbb{E}\left[(XZ)^2\right] - \mathbb{E}\left[X^2\right]^2 = \mathrm{Var}\left(X^2\right)$$

   Si X et Z étaient indépendants, on aurait $\mathbb{E}[(XZ)^2] = \mathbb{E}[X^2]^2$ et donc $\mathrm{Var}(X^2) = 0$, ce qui implique que X^2 serait constante, ce qui est faux, bien sûr. Donc, X et Z ne sont pas indépendantes.

3. Par ailleurs, en utilisant l'indépendance de X et Y,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Z) &= \mathbb{E}[XZ] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Z]\\ &= \mathbb{E}\left[X^2 Y\right]\\ &= \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}\left[X^2\right]\\ &= (2p-1)\mathbb{E}\left[X^2\right]\end{aligned}$$

   Donc la covariance de X et Z est nulle si (et seulement si) p vaut 1/2.