Université Mohammed Premier
Faculté Pluridisciplinaire de Nador
Département de Mathématiques

Année 2020/2021
Filière SMPC
Analyse 2

Corrigé de la Série 3

Exercice 1 :

1. La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0,1]$, le problème de convergence est en 0. On sait que $\sqrt{x}\ln x \to 0$ quand $x \to 0$. Ceci signifie que $\ln x = o(1/\sqrt{x})$ en 0. Puisque $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ converge, on en déduit par critère de comparaison que $\int_0^1 \ln x dx$ converge.

2. Ici, on ne connait pas de primitive de e^{-t^2} qui s'exprime facilement l'aide des fonctions usuelles (en fait, c'est même impossible). On doit donc comparer. Commenons par remarquer que $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Le problème de convergence de l'intégrale ne se pose donc qu'au voisinage de $+\infty$. Mais il est facile de voir que
$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x^2} = \lim_{u\to+\infty} ue^{-u} = 0.$$
Autrement dit, $e^{-x^2} = o(1/x^2)$. Ainsi, puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, il en est de même de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

3. Là encore, on va majorer, et on va même prouver que l'intégrale est absolument convergente. Pour cela, on remarque que, pour $x \geq 0$, $|xe^{-x}\sin x| \leq xe^{-x}$. D'autre part, puisque $x^3e^{-x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, on en déduit que $xe^{-x}\sin(x) = o(1/x^2)$. Ainsi, l'intégrale est absolument convergente.

4. La fonction $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. En 0, elle est équivalente $\ln t$, fonction négative au voisinage de 0 et intégrable. Par comparaison, $\int_0^1 \ln te^{-t}dt$ converge. Au voisinage de l'infini, on remarque que $t^2\ln te^{-t}$ tend vers 0 lorsque t vers $+\infty$. Ainsi, $\ln te^{-t} =_{+\infty} o(1/t^2)$. Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, $\int_1^{+\infty} \ln te^{-t}dt$ converge. Ainsi, on a prouvé la convergence de $\int_0^{+\infty} \ln te^{-t}dt$.

5. En 1, la fonction est équivalente $\frac{1}{1-t}$, fonction de signe constant dont l'intégrale est divergente (en 1). Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}dt$ diverge.

6. La fonction $t \mapsto \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, au voisinage de $+\infty$, on a
$$\lim_{t\to+\infty} t^2 \times \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} = \lim_{t\to+\infty} te^{-\sqrt{t}} = 0$$
par croissance comparée des fonctions polynomiales et exponentielles. Par comparaison une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}dt$ est convergente.

Exercice 2 :

1. Au voisinage de 0, la fonction intégrer est équivalente $\ln t$, qui est une fonction intégrable en 0. Au voisinage de 1, on a

$$\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} \sim_1 \frac{t-1}{\sqrt{1-t}} = -\sqrt{1-t}.$$

La fonction se prolonge donc par continuité en 1, ce qui achève de prouver la convergence de l'intégrale entre 0 et 1. Pour calculer sa valeur, on réalise le changement de variables $u=\sqrt{1-t}$. On trouve :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt &= 2\int_0^1 \ln(1-u^2)du \\
&= 2\int_0^1 \ln(1-u)du + 2\int_0^1 \ln(1+u)du \\
&= 2\int_0^1 \ln(x)dx + 2\int_1^2 \ln(x)dx \\
&= 2\int_0^2 \ln(x)dx \\
&= 2\left[x\ln x - x\right]_0^2 \\
&= 4\ln 2 - 4.
\end{aligned}$$

2. Pour la convergence de l'intégrale, il suffit de remarquer que la fonction est continue sur $[0,+\infty[$ et qu'au voisinage de $+\infty$, elle est dominée par $\frac{1}{t^2}$. En effet, on a

$$t^2 \times te^{-\sqrt{t}} = t^3 e^{-\sqrt{t}} = e^{3\ln t - \sqrt{t}} \to 0 \text{ en } +\infty.$$

Pour le calcul de l'intégrale, on commence par effectuer le changement de variables $u=\sqrt{t}$. On obtient :

$$\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{+\infty} u^3 e^{-u}du.$$

On effectue ensuite des intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}dt &= 2\left[-u^3e^{-u}\right]_0^{+\infty} + 6\int_0^{+\infty} u^2e^{-u}du \\
&= 6\left[-u^2e^{-u}\right]_0^{+\infty} + 12\int_0^{+\infty} ue^{-u}du \\
&= 12\left[-ue^{-u}\right]_0^{+\infty} + 12\int_0^{+\infty} e^{-u}du \\
&= 12.
\end{aligned}$$

3. On remarque d'abord que $|\sin(t)e^{-at}| \leq e^{-at}$ qui est une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$ (car $a>0$) et donc la fonction $t\mapsto \sin(t)e^{-at}$ est elle-même intégrable. Pour calculer l'intégrale, il suffit d'effectuer une intégration par parties deux fois, Il vient

$$I = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\cos(t)e^{-at}\right]_0^{+\infty} - a\int_0^{+\infty}\cos(t)e^{-at}\\
&= 1 - a\int_0^{+\infty}\cos(t)e^{-at}\\
&= 1 - a\left(\left[\sin(t)e^{-at}\right]_0^{+\infty} + a\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-at}\right)\\
&= 1 - a^2 I.
\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que $I = \frac{1}{a^2+1}$.

Exercice 3 :

1. a) On va justifier, pour tout $a > 0$, la convergence de $\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{a^2+t^2}dt$. D'abord, la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{a^2+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Au voisinage de 0, on a l'équivalence
$$\frac{\ln t}{a^2+t^2} \sim_0 \frac{\ln t}{a^2}$$
et on sait que $\ln t$ est intégrable en 0. De même, au voisinage de $+\infty$, on a
$$\frac{\ln t}{a^2+t^2} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$
On en déduit la convergence de $\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{a^2+t^2}$.
b) Le changement de variables $u = 1/t$ donne ensuite
$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt = -\int_0^{+\infty}\frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u^2}}\frac{-1}{u^2}du = -\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}du.$$
On en déduit que $\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt = 0$.

2. Pour calculer cette intégrale, on fait le changement de variables $t = au$. On obtient
$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{a^2+t^2}dt &= \int_0^{+\infty}\frac{\ln au}{a^2+a^2u^2}adu\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{\ln a}{a(1+u^2)}du + \int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{a(1+u^2)}du.
\end{aligned}$$
Utilisant le calcul précédent et le fait qu'une primitive de $\frac{1}{1+u^2}$ est $\arctan u$, on trouve finalement
$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{a^2+t^2}dt = \frac{\pi\ln a}{2a}.$$

Exercice 4 :

1. Soit $M > 0$ tel que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{1+x^2}$ est alors continue sur $[0,+\infty[$, et elle vérifie $|\frac{f(x)}{1+x^2}| \leq \frac{M}{1+x^2}$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{1+x^2}dx$ converge. De même, $x \mapsto \frac{f(1/x)}{1+x^2}$ est alors continue sur $]0,+\infty[$ (attention, on n'a plus obligatoirement continuit en 0). Le problème en $+\infty$ se traite exactement comme précédemment, et en 0, il suffit d'observer que
$$\frac{|f(1/x)|}{1+x^2} \leq M,$$
et comme les fonctions constantes sont intégrables au voisinage de tout point, on a aussi prouvé la convergence de l'intégrale au voisinage de 0.

2. Effectuons le changement de variables $u = 1/x$. On trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx = -\int_0^{+\infty} \frac{f(1/u)}{1+\frac{1}{u^2}} \frac{-1}{u^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2} dx.$$

3. a) On applique le résultat des questions précédentes avec $f(x) = \frac{1}{1+x^n}$ (qui est bien continue et bornée sur $[0, +\infty[$). On trouve $f(\frac{1}{x}) = \frac{x^n}{1+x^n}$. Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)} = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$$

C'est à dire $I = J$.
b) Mais si on effectue la somme de ces deux intégrales, on trouve :

$$I + J = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

c) Ces deux intégrales sont donc égales $\frac{\pi}{4}$.