

# Espaces de Hilbert

## 1.1 Produits scalaires et notion d'espace de Hilbert

**Définition.1.1** Soit  $\mathcal{H}$  un espace vectoriel réel ou complexe. Un produit scalaire est une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  si  $\mathcal{H}$  un espace vectoriel complexe et  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  si  $\mathcal{H}$  un espace vectoriel réel, vérifiant

- (i)  $\forall y \in \mathcal{H} : x \mapsto \langle x, y \rangle$  est linéaire (en  $x$ ),
- (ii)  $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ ,
- (iii)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  et si  $\langle x, x \rangle = 0$  alors  $x = 0$ .

Par conséquent  $y \mapsto \langle x, y \rangle$  est anti-linéaire (en  $y$ ) si  $\mathcal{H}$  un espace vectoriel complexe. On pose

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Nous montrerons plus tard que  $\|\cdot\|$  est bien une norme.

*Exemple .1.2* Soit  $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ , où  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un borélien, muni de la mesure de Lebesgue ou la mesure discrète. Si  $f, g \in L^2(\Omega)$  alors  $f\bar{g} \in L^1(\Omega)$  et

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f\bar{g}$$

est bien défini, et  $\|f\| = \sqrt{\int |f|^2} = \|f\|_2$ .

**Lemme.1.3** Soit  $\mathcal{H}$  un espace vectoriel réel ou complexe muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Alors, pour tous  $x, y \in \mathcal{H}$

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

2

*Proof.*

$$\begin{aligned}\langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Nous vérifions aisément certaines propriétés de la norme pour  $\|\cdot\|$  :

- $\|x\| \geq 0$  par définition, et si  $\|x\| = 0$  c'est que  $\langle x, x \rangle = 0$  et donc  $x = 0$ .
- Pour  $\lambda \in \mathbf{C}$  nous avons  $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|$ .

**Proposition.1.4** (Inégalité de Cauchy Schwarz). *Soit  $\mathcal{H}$  un espace vectoriel (réel ou complexe) muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Alors pour tous  $x, y \in \mathcal{H}$*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

*Proof.* Si  $\|x\| = 0$  c'est que  $x = 0$  et l'inégalité est immédiate. Sinon,  $\|x\| > 0$  et pour tout  $t \in \mathbf{R}$  nous avons

$$0 \leq \|tx + y\|^2 = \|x\|^2 t^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle t + \|y\|^2.$$

Le discriminant de ce polynôme quadratique doit donc être  $\leq 0$  :

$$0 \geq (2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2,$$

d'où

$$\|x\| \|y\| \geq |\operatorname{Re}\langle x, y \rangle| \geq \operatorname{Re}\langle x, y \rangle.$$

De plus il existe  $\alpha \in \mathbf{C}$  de module 1 tel que  $\langle x, y \rangle = \alpha |\langle x, y \rangle|$ , d'où  $\bar{\alpha} \langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle|$  et

$$\|x\| \|y\| = \|x\| \|\alpha y\| \geq \operatorname{Re}\langle x, \alpha y \rangle = \operatorname{Re}(\bar{\alpha} \langle x, y \rangle) = \operatorname{Re}|\langle x, y \rangle| = |\langle x, y \rangle|. \quad \blacksquare$$

**Corollaire.1.5** *Soit  $\mathcal{H}$  un espace vectoriel (réel ou complexe) muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Alors  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  définit une norme.*

*Proof.* Il ne nous reste plus qu'à vérifier l'inégalité triangulaire. On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Cette norme est appelée la *norme associée* au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Définition.1.6** On dit que deux vecteurs  $x, y$  d'un espace vectoriel complexe sont orthogonaux pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**Lemme.1.7** Soient  $x, y$  deux vecteurs d'un espace vectoriel réel ou complexe  $\mathcal{H}$ . Alors on a

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

si  $\mathcal{H}$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

si  $\mathcal{H}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel En plus on a l'identité de la médiane ou du parallélogramme

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Si  $x$  et  $y$  sont orthogonaux on a l'identité de Pythagore

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

*Proof.* Par Lemme.1.3,

$$\|x + y\|^2 = (\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2), \quad \|x - y\|^2 = (\|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2),$$

d'où

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\operatorname{Re}\langle x, y \rangle.$$

Nous avons donc démontré l'identité du parallélogramme. Nous en déduisons également que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), \\ \operatorname{Im}\langle x, y \rangle &= \operatorname{Re}(-i\langle x, y \rangle) = \operatorname{Re}\langle x, iy \rangle = \frac{1}{4} (\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2), \end{aligned}$$

Ce qui établit la première identité sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Finalement, si  $x \perp y$  :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(0) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad \blacksquare$$

**Définition.1.8** Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée.

*Exemple .1.9*  $L^2(\Omega)$ . La complétude a été démontrée dans le théorème de Fischer-Riesz.

## 1.2 Somme directe et complémentaire orthogonal

**Définition.2.1** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  deux sous-espaces vectoriels. On dit que  $\mathcal{H}$  est la somme directe orthogonale de  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ , notée  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus^\perp \mathcal{H}_2$ , si  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$  et  $\forall x_1 \in \mathcal{H}_1, x_2 \in \mathcal{H}_2 : \langle x_1, x_2 \rangle = 0$ . Le complémentaire orthogonal d'un sous-espace  $F \subset \mathcal{H}$  est défini par  $F^\perp := \{x \in \mathcal{H} | \forall y \in F : \langle x, y \rangle = 0\}$ .

**Théorème.2.2** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $F \subset \mathcal{H}$  un sous-espace fermé. Soit  $x \in \mathcal{H}$ . Alors

(i) Il existe un unique  $y \in F$  qui satisfait

$$\|x - y\| = d(x, F) := \inf\{\|x - z\| : z \in F\}.$$

On note  $y = p_F(x)$ . Ceci définit alors une application

$$p_F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}.$$

(ii)  $p_F(x)$  est l'unique vecteur dans  $F$  qui satisfait  $x - p_F(x) \perp F$ .

(iii)  $\forall x \in \mathcal{H} : \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2$ .

(iv) L'application  $p_F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est linéaire est continue. C'est la projection sur  $F$  le long  $F^\perp$ .

(v) Le complémentaire orthogonal  $F^\perp$  est un sous espace fermé de  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H} = F \oplus F^\perp$ .

*Proof.* Pour  $\varepsilon > 0$ , prenons  $y, z \in F$  et supposons que  $d(x, y)^2 \leq d(x, F)^2 + \varepsilon$  et  $d(x, z)^2 < d(x, F)^2 + \varepsilon$ . Posons :  $w = \frac{y+z}{2}$ ,  $u = \frac{y-z}{2}$ , de telle façon que  $w \in F$  et  $y = w+u$ ,  $z = w-u$ . D'après l'identité du parallélogramme :

$$\begin{aligned} \|(x-w)+u\|^2 + \|(x-w)-u\|^2 &= 2(\|x-w\|^2 + \|u\|^2) \\ \frac{\|x-z\|^2 + \|x-y\|^2}{2} &= d(x, w)^2 + \frac{1}{4}d(y, z)^2 \\ d(x, F)^2 + \varepsilon &> d(x, F)^2 + \frac{1}{4}d(y, z)^2 \\ d(y, z) &< 2\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Soit maintenant  $(y_n) \subseteq F$  une suite telle que  $d(x, y_n) \rightarrow d(x, F)$ . Alors d'après notre calcul c'est une suite de Cauchy, qui doit donc converger vers un  $y \in F$  (puisque  $\mathcal{H}$  est complet et  $F$  fermé). Nous obtenons  $d(x, y) = \lim d(x, y_n) = d(x, F)$ . Pour l'unicité, supposons que  $z \in F$  vérifie lui aussi  $d(x, z) = d(x, F)$ . Alors encore d'après le calcul

précédent  $d(y, z) < 2\sqrt{\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , ce qui donne  $d(y, z) = 0$  et  $y = z$ . Ceci montre le premier point et donc l'existence de l'application  $P_F$ .

Pour le deuxième point, supposons que  $x - P_F(x) \notin F$ . Il existe donc  $z \in F$  tel que  $\langle x - P_F(x), z \rangle = s \neq 0$ , et quitte à diviser  $z$  par  $\bar{s}$  nous pouvons supposer que  $\langle x - P_F(x), z \rangle = 1$ . Soit encore  $t$  une variable réelle. Alors  $P_F(x) + tz \in F$  et

$$d(x, P_F(x) + tz)^2 = \|x - P_F(x) - tz\|^2 = t^2\|z\|^2 - 2t + \|x - P_F(x)\|^2.$$

Ce polynôme en  $t$  atteint son minimum ailleurs qu'à  $t = 0$ , donc  $d(x, F) < d(x, P_F(x))$ , une contradiction au choix de  $P_F(x)$ . Nous avons donc bien  $x - P_F(x) \perp F$ . Pour l'unicité, supposons que  $x - y \perp F$  et  $x - z \perp F$ , où  $y, z \in F$  (par exemple, on pourrait avoir  $y = P_F(x)$ ). Alors  $y - z \in F$ , d'où  $\langle x - y, y - z \rangle = \langle x - z, y - z \rangle = 0$ . Une soustraction donne  $\langle y - z, y - z \rangle = 0$ , d'où  $y - z = 0$  et  $y = z$ .

Le troisième point découle du deuxième, vu que  $x - P_F(x) \perp P_F(x)$ .

Pour (iv), on vérifie aisément que  $(x + \lambda y) - (P_F(x) + \lambda P_F(y)) = (x - P_F(x)) + \lambda(y - P_F(y)) \in F^\perp$ , d'où  $P_F(x) + \lambda P_F(y) = P_F(x + \lambda y)$  d'après (ii), et  $P_F$  est linéaire. D'après (iii) nous avons  $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$ , donc  $P_F$  est continu (de norme  $\leq 1$ ).

Finalement, pour tout  $x \in \mathcal{H}$  nous avons  $x = (x - P_F(x)) + P_F(x)$ , où  $x - P_F(x) \in F^\perp$  et  $P_F(x) \in F$ , ce qui donne bien  $F \oplus F^\perp = \mathcal{H}$ . ■

**Corollaire.2.3.** *Pour tout sous-espace vectoriel fermé  $F \subset \mathcal{H}$  on a  $(F^\perp)^\perp = F$ . En particulier l'orthogonale d'un sous-espace vectoriel non-fermé est fermé. En outre  $F$  est dense dans  $\mathcal{H}$  si et seulement si  $F^\perp = \{0\}$ .*

**Corollaire.2.4** (Théorème de représentation de Riesz). *Soit  $\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  une forme linéaire continue. Alors il existe un unique  $y \in \mathcal{H}$  tel que pour tout  $x$  :*

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle.$$

En outre, nous avons  $\|\varphi\| = \|y\|$  où

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : \|x\| \leq 1\}.$$

*Proof.* Si  $\varphi = 0$ , alors  $y = 0$  convient. Si  $\varphi \neq 0$ , soit  $F = \varphi^{-1}(\{0\})$ . Alors  $F$  est un hyperplan fermé de  $\mathcal{H}$ , distinct de  $\mathcal{H}$ . Donc  $F = F \oplus^\perp F^\perp$ , où  $F^\perp$  est de dimension 1. Soit  $y_0 \in F^\perp$  avec  $\|y_0\| = 1$ . Tout  $x \in \mathcal{H}$  s'écrit  $x = P_F(x) + P_{F^\perp}(x)$  avec  $P_{F^\perp}(x) = ty_0$  ( $t$  dépend de  $x$ ). Comme  $\varphi$  est linéaire, on obtient

$$\varphi(x) = t\varphi(y_0) \text{ avec } t = \langle x, y_0 \rangle.$$

Par conséquent, on a :

$$\varphi(x) = \varphi(y_0)\langle x, y_0 \rangle = \langle x, \overline{\varphi(y_0)}y_0 \rangle.$$

Par conséquent, en posant  $y = \overline{\varphi(y_0)}y_0$ , on a  $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$ .

Pour l'unicité, il suffit de constater que si  $\langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$  pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , alors  $y_1 - y_2 \perp \mathcal{H}$  et donc  $y_1 = y_2$ .

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,  $|\varphi(x)| \leq \|x\|\|y\|$ , et donc  $\|\varphi\| \leq \|y\|$ . De plus, comme  $\varphi(y/\|y\|) = \|y\|$ , on obtient  $\|\varphi\| \geq \|y\|$ , ce qui implique l'égalité désirée. ■

### 1.3 Bases orthonormales

**Définition.3.1** Un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est séparable s'il possède une suite de points qui est dense dans  $\mathcal{H}$ .

*Exemple .3.2*  $L^2(\Omega)$ .

**Définition.3.3** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable. On appelle base orthonormale de  $\mathcal{H}$  tout sous-ensemble fini ou dénombrable  $\{e_n\}_n$  qui vérifie

- (i)  $\|e_n\| = 1$  et  $\langle e_n, e_m \rangle = 0$  si  $n \neq m$ ,
- (ii) le sous-espace vectoriel engendré par  $\{e_n\}_n$  (par combinaisons linéaires finies) est dense dans  $\mathcal{H}$ .

*Exemple .3.4*  $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$  avec produit scalaire  $\langle (\lambda_k)_k, (\mu_m)_m \rangle = \sum_k \lambda_k \overline{\mu_k}$  et  $e_n$  la suite  $(\delta_{nk})_k$ .

*Exemple .3.5*  $\mathcal{H} = L^2([0, 2\pi])$  avec produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$  et  $e_n$  la fonction  $t \mapsto e^{int}$ .

**Lemme.3.6** Soit  $(e_i)_{i < n}$  une famille orthonormée et soit  $F$  le sous-espace engendré (donc  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ , mais on ne demande pas que  $F$  soit dense). Alors pour tout  $x$  :

$$P_{\overline{F}}(x) = \sum_{i < n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

*Proof.* Il suffit de prouver que  $x - \sum_{i < n} \langle x, e_i \rangle e_i \perp F$ , ce qui est immédiat. ■

**Théorème.3.7** (Existence des bases orthonormales). Tout espace de Hilbert séparable possède une base orthonormale.

*Proof.* Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite dense de  $\mathcal{H}$ . On en extrait un système libre (linéairement indépendant) que l'on appelle  $(v_n)_{n \geq 0}$ . On construit ensuite une base orthonormale à partir de  $(v_n)_{n \geq 0}$  suivant le **principe d'orthonormalisation de Gram-Schmidt** : On pose  $e_0 = \frac{v_0}{\|v_0\|}$ . On remarque que  $v_1 - \langle v_1, e_0 \rangle e_0 \perp e_0$ . De plus le sous-espace engendré par  $e_0$  et  $e_1$  coïncide avec celui engendré par  $v_0$  et  $v_1$ . On obtient  $e_1$  en posant

$$e_1 = \frac{v_1 - \langle v_1, e_0 \rangle e_0}{\|v_1 - \langle v_1, e_0 \rangle e_0\|}.$$

Supposons  $e_0, \dots, e_n$  construits de sorte que ce soit un système orthonormal qui engendre le même sous-espace vectoriel que celui engendré par  $v_0, \dots, v_n$ , noté  $F_n$ . On obtiendra  $e_{n+1}$  en posant

$$e_{n+1} = \frac{v_{n+1} - P_{F_n} v_{n+1}}{\|v_{n+1} - P_{F_n} v_{n+1}\|}.$$

Par construction on obtiendra une base orthonormale de  $\mathcal{H}$ . ■

**Théorème.3.8.** Soient  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une base orthonormale.

(i) Pour toute  $(\lambda_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$  la série  $\sum_{n \geq 0} \lambda_n e_n$  converge dans  $\mathcal{H}$  et sa somme  $x = \sum_{n \geq 0} \lambda_n e_n$  vérifie

$$\langle x, e_n \rangle = \lambda_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} |\lambda_n|^2.$$

(ii) Pour tout  $x \in \mathcal{H}$  la série  $\sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2$  converge et

$$x = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

*Proof.* (i) Soit  $u_N = \sum_{n=0}^N \lambda_n e_n$ . Si  $p \geq N$ , on obtient

$$\|u_p - u_N\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^p \lambda_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^p |\lambda_n|^2$$

car  $\langle e_n, e_p \rangle = 1$  si  $n = p$  et 0 sinon. Comme  $(\lambda_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ ,  $(u_n)_n$  est de Cauchy dans  $\mathcal{H}$  qui est complet, donc  $(u_n)_n$  converge dans  $\mathcal{H}$ . De plus, pour tout  $N \geq n$ , on a  $\langle u_N, e_n \rangle = \lambda_n$ . Par continuité du produit scalaire (cf. Cauchy-Schwarz),  $\langle x, e_n \rangle = \lambda_n$ . Par continuité de la norme

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u_N\|^2 = \|x\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N |\lambda_n|^2 = \sum_{n \geq 0} |\lambda_n|^2.$$

(ii) Soit  $v_N = \sum_{n=0}^N |\langle x, e_n \rangle|^2$ . La suite  $(v_n)_n$  est croissante et positive. Elle converge si et seulement si elle est majorée. Nous allons montrer que  $v_n \leq \|x\|^2$ . Pour cela posons

$$x_N = x - \sum_{k=0}^N \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Alors  $x_N \perp e_k$  pour tout  $k = 0, \dots, N$ . D'après l'identité de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|x_N\|^2 + \left\| \sum_{k=0}^N \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x_N\|^2 + \sum_{k=0}^N |\langle x, e_k \rangle|^2,$$

qui implique  $v_N \leq \|x\|^2$ . On conclut ensuite en appliquant (i). ■

**Définition.3.9** Soient  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  deux espaces de Hilbert. Une isométrie entre  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  est une application linéaire  $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  qui satisfait  $\forall x \in \mathcal{H}_1 : \|U(x)\| = \|x\|$ .  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont isomorphes s'il existe une isométrie bijective entre eux.

**Corollaire.3.10** *Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie est isomorphe à  $\ell^2(\mathbb{N})$ .*

*Proof.* Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable et soit  $(e_n)_{n \geq 0}$  une base orthonormale de  $\mathcal{H}$ . Soit  $U$  l'application de  $\mathcal{H}$  dans  $\ell^2(\mathbb{N})$  définie par  $U(x) = (\langle x, e_n \rangle)_{n \geq 0}$ . D'après le théorème.3.8  $U$  est une isométrie surjective. Comme toute isométrie linéaire est injective,  $U$  est bijective. ■

**Proposition.3.11** *Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux espaces de Banach. Soit  $E \subseteq X_1$  un sous espace vectoriel dense (donc, non nécessairement complet). Soit  $u : E \rightarrow X_2$  une application linéaire, et supposons en outre qu'elle est continue (ce qui revient à l'existence d'une constante  $C$  telle que pour tout  $x \in E : \|u(x)\| \leq C\|x\|$ ).*

*Alors  $u$  admet un unique prolongement en une application linéaire continue  $\tilde{u} : X_1 \rightarrow X_2$ .*

*Proof.* Soit  $x \in X_1$ . Alors il existe une suite  $(x_n) \subseteq E$  t.q.  $x_n \rightarrow x$ . Si  $\tilde{u}$  existe elle doit satisfaire

$$\tilde{u}(x) = \lim u(x_n) \quad \text{quand } x_n \rightarrow x \quad (1.1)$$

d'où son unicité. Il reste à démontrer que (1.1) définit en effet une application  $\tilde{u}$  avec les propriétés désirées.



D'abord on vérifie que la limite existe toujours dans (1.1). En effet,  $(x_n)$  est une suite de Cauchy et

$$\|u(x_n) - u(x_m)\| = \|u(x_n - x_m)\| \leq C\|x_n - x_m\|.$$

Donc  $(u(x_n))_n$  est également une suite de Cauchy et  $\lim u(x_n)$  existe. Soit maintenant  $(y_n) \subseteq E$  une autre suite telle que  $y_n \rightarrow x$ . Alors la suite  $x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ , que l'on noterait  $(z_n)$ , a aussi  $x$  pour limite, donc  $\lim u(z_n)$  existe et est égale à la limite de toute sous-suite :

$$\lim u(y_n) = \lim u(z_n) = \lim u(x_n).$$

En conséquence,  $\lim u(x_n)$  ne dépend que de  $x$  (et non du choix de la suite  $(x_n)$ ), et (1.1) définit bien une application  $\tilde{u}: X_1 \rightarrow X_2$ .

Si  $x \in E$  alors la suite constante  $x_n = x$  tend vers  $x$ , d'où  $\tilde{u}(x) = u(x)$ . Aussi, si  $(x_n), (y_n) \subseteq E$  et  $x = \lim x_n, y = \lim y_n$  dans  $X_1$  alors

$$x_n + y_n \rightarrow x + y, \quad \lambda x_n \rightarrow \lambda x, \quad \|x_n\| \rightarrow \|x\|, \quad \|u(x_n)\| \rightarrow \|u(x)\|,$$

d'où

$$u(x + y) = u(x) + u(y), \quad u(\lambda x) = \lambda u(x), \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|.$$

■