Chapitre 3:
Intégrales Généralisées

Hamid Boua
Faculté pluridisciplinaire-Nador-
Module: Analyse 2
SMP-SMC

26 mai 2021

Sommaire

Sommaire

$\rightarrow$ Dans le chapitre précédent, on a défini et étudié la notion d'intégrale de Riemann d'une fonction bornée et définie sur un intervalle fermé et borné.

$\rightarrow$ Dans ce chapitre, on cherche à étendre la notion d'intégrale aux fonctions non nécessairement bornée et définies sur des intervalles de la forme $[a, b[$; $[a, +\infty[$, $]a, b]$, $]-\infty, b]$, $]a, b[$, $]-\infty, +\infty[$.

Définition :

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$. Pour $x \in [a,b[$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. On dit que l'intégrale de f sur $[a,b[$ est convergente ou existe si $\lim\limits_{x \to b} F(x)$ existe et elle est finie.

Cette limite est appelée intégrale généralisée ou impropre de f sur $[a,b[$, et on la note par $\int_a^b f(t)dt$.

$\longrightarrow$ Si $\lim\limits_{x \to b} F(x)$ n'existe pas ou égale à ∞, on dit que l'intégrale de f sur $[a,b[$ n'existe pas ou divergente.

Définition :

Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ où $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$. Pour $x \in]a, b]$, on pose $F(x) = \int_x^b f(t)dt$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est convergente ou existe si $\lim_{x \to a} F(x)$ existe et elle est finie.

Cette limite est appelée intégrale généralisée ou impropre de f sur $]a, b]$, et on la note par $\int_a^b f(t)dt$.

$\longrightarrow$ Si $\lim_{x \to a} F(x)$ n'existe pas ou égale à ∞, on dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ n'existe pas ou divergente.

Exemples

1) Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$.

Pour $x \geq 0$ on a :

$$\int_0^x e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x} + 1$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}dt = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 1$. Donc $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente et on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$$

Exemples

1) Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$.

Pour $x \geq 0$ on a :

$$\int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x} + 1$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t} dt = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - e^{-x} = 1$. Donc $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente et on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

2) Etudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ Pour $x \geq 1$ on a :
$\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_1^x = 2\sqrt{x} - 2 \to +\infty$, qd $x \to +\infty$. Donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

diverge

Pour $\varepsilon > 0$: $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2$, qd $\varepsilon \to 0$. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est converge et on a

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$$

.

2) Etudier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ Pour $x \geq 1$ on a :
$\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_1^x = 2\sqrt{x} - 2 \to +\infty$, qd $x \to +\infty$. Donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

diverge
Pour $\varepsilon > 0$: $\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2$, qd $\varepsilon \to 0$. Donc $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est converge et on a

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$$

.

Remarques

1) Si f est continue sur $[a, b[$ et si $c \in [a, b[$ alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont de même nature. En effet :

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt$$

$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim_{x \to b} \int_c^x f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$

2) De même si f est continue sur $]a, b]$ et si $c \in]a, b]$ alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^c f(t)dt$ sont de même nature.

Définition

Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ $(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$. On dit que l'intégrale de f sur $]a,b[$ est convergente s'il existe $c \in]a,b[$ tel que chacune des intégrales de f sur $]a,c]$ et sur $[c,b[$ sont convergentes, et on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est indépendant de c, et s'appelle l'intégrale généralisée de f sur $]a,b[$.

Exemples

1) Etudier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ Pour $x > 0$:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan t]_0^x = \arctan x \to \frac{\pi}{2}, \text{ qd } x \to +\infty.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

Pour $x < 0$: $\displaystyle\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan t]_x^0 = -\arctan x \to \frac{\pi}{2}$, qd $x \to -\infty$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Exemples

1) Etudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ Pour $x > 0$:

$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^x = \arctan x \to \frac{\pi}{2}$, qd $x \to +\infty$.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$

Pour $x < 0$: $\int_x^0 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_x^0 = -\arctan x \to \frac{\pi}{2}$, qd $x \to -\infty$.

Donc $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$

D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

2) Etudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)dt$ Pour $x > 0$:

$\int_0^x \sin(t)dt = -[\cos(t)]_0^x = -\cos(x) + 1$ n'a pas de limite qd $x \to +\infty$, donc $\int_0^x \sin(t)dt$ diverge et par suite $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)dt$ diverge.

2) Etudier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)dt$ Pour $x > 0$:

$\displaystyle\int_{0}^{x} \sin(t)dt = -[\cos(t)]_0^x = -\cos(x) + 1$ n'a pas de limite qd $x \to +\infty$, donc $\displaystyle\int_{0}^{x} \sin(t)dt$ diverge et par suite $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)dt$ diverge.

Définition :

1) Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ et sur $]b, d[$. On dit que $\int_a^d f(t)dt$ est convergente si les deux intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_b^d f(t)dt$ sont convergentes, et dans ce cas on pose :

$$\int_a^d f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^d f(t)dt$$

2) Soit $a_0 < a_1 < ... < a_n$, soit f une fonction continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ pour chaque $i \in \{0, ..., n-1\}$. On dit que $\int_{a_0}^{a_n} f(t)dt$ est convergente si pour chaque $i \in \{0, ..., n-1\}$, $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$ est convergente et dans ce cas on pose

$$\int_{a_0}^{a_n} f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$$

Exemple :

$\displaystyle\int_0^{10} \frac{e^t}{t(t-1)(t-2)}dt$ converge si et seulement si les 3 intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_0^1 \frac{e^t}{t(t-1)(t-2)}dt,\ \int_1^2 \frac{e^t}{t(t-1)(t-2)}dt,\ \ et\ \ \int_2^{10} \frac{e^t}{t(t-1)(t-2)}dt$$

Proposition (Exemple de référence à retenir)

Soit $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$,
2. $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge $\Longleftrightarrow \alpha < 1$,

○ L'étude de l'intégrale généralisée d'une fonction f sur un intervalle $]c, d]$ se ramène par le changement de variable $t = -x$ à l'étude de l'intégrale généralisée de la fonction $x \longrightarrow f(-x)$ sur l'intervalle $[-d, -c[$

$$\int_c^d f(t)dt = \int_{-d}^{-c} f(-t)dt$$

Dans la suite on va considérer seulement les intégrales généralisées sur des intérvalles de type $[a, b[$.

Sommaire

Proposition :

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b[$. Pour que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit, qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [a, b[$:
$\displaystyle\int_a^x f(t)dt \leq M$.

Proposition :

Soient f et g deux fonctions positives continues

1. Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge et dans ce cas on a :

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

2. Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Exemple :

Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}dx$

On a : $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^x}$

or $\int_0^t \frac{1}{e^x}dx = \int_0^t e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^t = -e^{-t} + 1 \to 1\ qd\ t \to +\infty$

Proposition :

Soient f et g deux fonctions positives continues

1. Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge et dans ce cas on a :

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

2. Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Exemple :

Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}dx$

On a : $\forall x \in [0,+\infty[$, $0 \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^x}$

or $\int_0^t \frac{1}{e^x}dx = \int_0^t e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^t = -e^{-t}+1 \to 1 \; qd \; t \to +\infty$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x} dx$ converge, d'où $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1} dx$ converge.

Définition :

Deux fonctions f et g définies à gauche de $b \in \mathbb{R}$, sauf peut être en b (resp. au voisinage de $+\infty$) sont équivalentes à gauche de b (resp. au voisinage de $+\infty$) s'il existe une fonction ε définie à gauche de b sauf peut être en b (resp. au voisinage de $+\infty$) telle que $f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$ avec $\lim_{x \to b-} \varepsilon(x) = 0$ (resp. $\lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$).

Théorème :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et b tel que $a < b \leq +\infty$. f et g deux fonctions positives, continues sur $[a, b[$.

1. Si f et g sont équivalentes à gauche de b (resp. au voisinage de $b = +\infty$) alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.
2. Si $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, alors $\int_a^b g(t)dt$ converge $\Longrightarrow \int_a^b f(t)dt$ converge
3. Si $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge $\Longrightarrow \int_a^b f(t)dt$ diverge

Exemples

1) Etudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^{3/2}}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$.

- $\displaystyle\frac{e^x-1}{x^{3/2}} \sim_0 \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}dx$ converge donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^{3/2}}dx$ converge.
- $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{x^5+1}} = \frac{x}{x^{5/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} = \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$ converge.

2) Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}$

On a $\displaystyle\frac{1}{\sin t} \sim_0 \frac{1}{t}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}dt$ diverge.

Exemples

1) Etudier la convergence des intégrales $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^{3/2}}dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$.

• $\frac{e^x-1}{x^{3/2}} \sim_0 \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ or $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}dx$ converge donc $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^{3/2}}dx$ converge.

• $\frac{x}{\sqrt{x^5+1}} = \frac{x}{x^{5/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} = \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$ converge.

2) Etudier la convergence de $\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}$

On a $\frac{1}{\sin t} \sim_0 \frac{1}{t}$ et $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge, donc $\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}dt$ diverge.

Exemples

1) Etudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^{3/2}}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$.

• $\displaystyle\frac{e^x-1}{x^{3/2}} \sim_0 \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}dx$ converge donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^{3/2}}dx$ converge.

• $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{x^5+1}} = \frac{x}{x^{5/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} = \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$ converge.

2) Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}$

On a $\displaystyle\frac{1}{\sin t} \sim_0 \frac{1}{t}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}dt$ diverge.

Corollaire

Soit f une fonction positive et continue sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, on a :

1. Si $f(x) \sim_{+\infty} \frac{C}{x^\alpha}$ $(C \neq 0)$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ sont de même nature, donc
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$
2. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = 0$ et $\alpha > 1$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.
3. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ et $\alpha \leq 1$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

Exemples

Etudier la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t}\,dt$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^2}\,dt$. $\rightarrow$

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$ et $2 > 1$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge.

$\rightarrow \displaystyle\lim_{t\to+\infty} t\frac{\log t}{t} = \lim_{t\to+\infty} \log t = +\infty$ et $1 \leq 1$ alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t}\,dt$ diverge.

$\rightarrow \displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{3/2}\frac{\log t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log t}{t^{1/2}} = 0$ et $\dfrac{3}{2} > 1$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^2}\,dt$ converge.

$\triangle$ On remarque qu'on n'obtient rien si on multiple $\dfrac{\log t}{t^2}$ par t ou par t^2 en effet :

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\frac{\log t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \log t = +\infty$ mais $\alpha = 2 > 1$.

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t\frac{\log t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log t}{t} = 0$ mais $\alpha = 1 \leq 1$.

Exemples

Etudier la nature des intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t}dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^2}dt$. $\rightarrow$

$\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$ et $2 > 1$ alors $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.

$\rightarrow \lim_{t\to+\infty} t\frac{\log t}{t} = \lim_{t\to+\infty} \log t = +\infty$ et $1 \leq 1$ alors $\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t}dt$ diverge.

$\rightarrow \lim_{t\to+\infty} t^{3/2}\frac{\log t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log t}{t^{1/2}} = 0$ et $\frac{3}{2} > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^2}dt$ converge.

$\triangle$ On remarque qu'on n'obtient rien si on multiple $\frac{\log t}{t^2}$ par t ou par t^2 en effet :

$\lim_{t\to+\infty} t^2\frac{\log t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \log t = +\infty$ mais $\alpha = 2 > 1$.

$\lim_{t\to+\infty} t\frac{\log t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log t}{t} = 0$ mais $\alpha = 1 \leq 1$.

Exemples

Etudier la nature des intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t}dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^2}dt$. $\rightarrow$

$\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$ et $2 > 1$ alors $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.

$\rightarrow \lim_{t\to+\infty} t\frac{\log t}{t} = \lim_{t\to+\infty} \log t = +\infty$ et $1 \leq 1$ alors $\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t}dt$ diverge.

$\rightarrow \lim_{t\to+\infty} t^{3/2}\frac{\log t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log t}{t^{1/2}} = 0$ et $\frac{3}{2} > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^2}dt$ converge.

$\triangle$ On remarque qu'on n'obtient rien si on multiple $\frac{\log t}{t^2}$ par t ou par t^2 en effet :

$\lim_{t\to+\infty} t^2\frac{\log t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \log t = +\infty$ mais $\alpha = 2 > 1$.

$\lim_{t\to+\infty} t\frac{\log t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log t}{t} = 0$ mais $\alpha = 1 \leq 1$.

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ où $a < b \leq +\infty$. L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est dite absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge

Théorème :

Une intégrale absolument convergente est convergente.

$$\int_a^b |f(t)|dt \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ converge}$$

Exemple

Etudier l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2}dt$ $\forall t \in [1, +\infty[$ on a

$$\left|\frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{5}{t^2}$$

or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{5}{t^2}dt$ converge d'où

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2}\right| dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2}dt$ converge.

Exemple

Etudier l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2} dt$ $\forall t \in [1, +\infty[$ on a $\mid \frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2} \mid \leq \frac{5}{t^2}$

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{5}{t^2} dt$ converge d'où

$\int_1^{+\infty} \mid \frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2} \mid dt$ converge.

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2} dt$ converge.

Théorème : Intégration par parties

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b[$ $(a < b \leq +\infty)$. Si $\lim_{x\to b} f(x)g(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ alors les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ sont de même nature, et en cas de convergence on a :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \lim_{x\to b} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

Exemple

Etudier la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ Posons

$$g = \frac{1}{t}, \; g' = -\frac{1}{t^2}$$

$$f = -\cos t, \quad f' = \sin t$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ sont de même nature, or $|\frac{\cos t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ converge d'où $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

Exemple

Etudier la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ Posons

$$g = \frac{1}{t}, \; g' = -\frac{1}{t^2}$$

$$f = -\cos t, \quad f' = \sin t$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ sont de même nature, or $|\frac{\cos t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ converge d'où $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.