Université Mohammed Premier | Année 2020/2021

Faculté Pluridisciplinaire de Nador | Filière SMPC

Département de Mathématiques | S2 Analyse 2

Corrigé de la série 1

<u>Exercice 1 :</u>

1. $u_n \sim_{+\infty} \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série est convergente.

2. Le raisonnement est identique :
$$u_n \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$
et par comparaison é une série de Riemann convergente, la série est convergente.

3. On a $\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) = 1$ (rappelons que $\sin x \sim_0 x$) et la série est grossièrement divergente (son terme général ne tend pas vers 0).

4. Puisque $\ln(1+x) \sim_0 x$, on obtient
$$u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n},$$
et la série est donc divergente par comparaison à une série de Riemann divergente.

5. On a $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$. Donc par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum_n u_n$ est convergente.

6. On a $(-1)^n + n \sim_{+\infty} n$ et $n^2+1 \sim_{+\infty} n^2$, et donc
$$\frac{(-1)^n + n}{n^2+1} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}.$$
Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum_n u_n$ est divergente.

7. Il suffit de remarquer que, pour $n \geq 2$, $n! \geq 2^{n-1}$ (ceci se démontre aisément par récurrence par exemple). On en déduit que
$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$
Par comparaison à une série géométrique convergente, la série converge.

8. On a $u_n = \circ_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc la série $\sum_n u_n$ est convergente.

9. $u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n^2+n-1}\right)$, donc $u_n \sim_{+\infty} \frac{2}{n^2}$. Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum_n u_n$ est convergente.

Exercice 2 :

1. On a :
$$n^2u_n = \exp\left(2\ln n - \sqrt{n}\ln 2\right) = \exp\left(-\sqrt{n}\left(\ln 2 - 2\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)\right).$$
   Il résulte de $\lim_\infty \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ que
$$\lim_{n\to\infty} n^2u_n = 0,$$
   et par comparaison à une série de Riemann, la série est convergente.

2. Par croissance comparée des suites géométriques et de la suite factorielle, le terme général ne tend pas vers 0, sauf si $a = 0$. La série $\sum_n u_n$ est donc convergente si et seulement si $a = 0$.

3. On écrit tout sous forme exponentielle :
$$ne^{-\sqrt{n}} = \exp(\ln n - \sqrt{n}).$$
   On a alors
$$\frac{\exp(\ln n - \sqrt{n})}{\exp(-2\ln n)} = \exp(3\ln n - \sqrt{n}) \to 0$$
   et donc
$$ne^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   La série est convergente.

4. On vérifie aisément que
$$u_n \sim_{+\infty} \frac{2\ln n}{(4/\sqrt{2})^n}.$$
   Puisque $4/\sqrt{2} > 2$, on obtient
$$u_n =_{+\infty} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$
   et donc la série est convergente.

5. On remarque que $0 < \ln(e^n - 1) \leq \ln(e^n) = n$. Ainsi, pour $n \geq 3$,
$$u_n \geq \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n},$$
   et donc la série de terme général u_n diverge.

6. On a
$$nu_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \exp\left(-\frac{\ln n}{n}\right) \to \exp(0) = 1.$$
   Ainsi, $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ et la série est divergente.

Exercice 3 :

1. Une série dont le terme général est constitué de puissances et de factorielles est très bien adaptée à l'utilisation du critère de D'Alembert. Dans le cas particulier de cette question, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{a(n+1)}} \times \frac{n^{an}}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} \times \frac{1}{(n+1)^{a-1}}.$$

Or, on peut écrire

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} = \exp\left(-an\ln(1+1/n)\right) = \exp(-a+o(1))$$

et donc ce terme converge vers e^{-a}. On distingue alors trois cas :
i) Si $a > 1$, u_{n+1}/u_n tend vers 0, la série $\sum_n u_n$ converge.
ii) Si $a = 1$, u_{n+1}/u_n tend vers $e^{-1} \in [0,1[$, et donc la série $\sum_n u_n$ converge.
iii) Si $a < 1$, u_{n+1}/u_n tend vers $+\infty$, et donc la série $\sum_n u_n$ diverge.

2. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \dfrac{1}{2} < 1$, d'après le critère de Cauchy $\sum_n u_n$ est convergente.

3. On va utiliser la règle de d'Alembert. Pour cela, on écrit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \times \exp\left(n(\ln(\ln(n+1)) - \ln\ln n)\right) \times \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

Or, la fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$ est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$. On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis, que

$$|\ln(\ln(n+1)) - \ln\ln(n)| \leq \frac{1}{n\ln n}.$$

Il en découle :

$$0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \times \exp\left(\frac{n}{n\ln n}\right) \times \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

On en déduit facilement, par les théorèmes de composition des limites et par le fait que $\ln(n+1)/(n+1)$ tend vers 0, que la limite de u_{n+1}/u_n est nulle. Par la règle de d'Alembert, la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 4 :

1. Non, car

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

et la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente.

2. Étudions la monotonie de (u_n). On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \leq 0.$$

La suite (u_n) est donc décroissante. De même, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \geq 0.$$

La suite (v_n) est donc croissante. De plus,

$$v_n - u_n = \frac{-1}{2n+1} \to 0.$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont bien adjacentes.

3. Puisque deux suites adjacentes convergent vers la même limite, les deux suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite. C'est bien que (S_n) converge, ou encore que la série est convergente.

Exercice 5 :

1. On a :
$$|u_n| \leq \frac{1}{n^2},$$
et la série converge absolument.

2. La série est alternée, et le module du terme général décroît vers 0 à partir d'un certain rang : la série converge par application du critère des séries alternées.

3. Il s'agit d'une série alternée bien cachée. En effet, n^2 a la parité de n, et $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Le terme général vaut donc $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$. La série converge par application immédiate du critère spécial des séries alternées.