Université Mohammed Premier
Faculté Pluridisciplinaire de Nador
Département de Mathématiques

Série 3

Année 2020/2021
Filière SMPC
Analyse 2

Intégrales généralisées

Exercice 1 :

Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes?

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln t dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ **3.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x(\sin x)e^{-x} dx$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-t} dt$ **5.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$ **6.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$

Exercice 2 :

Justifier la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}} dt$ **3.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at} dt,\ a > 0$

.

Exercice 3 :

1. a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ converge.

   b) En utilisant le changement de variables $u = 1/t$, vérifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = 0$.

2. Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2} dt$.

Exercice 4 :

Soit f une fonction continue bornée sur $[0, +\infty[$.

1. Démontrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2} dx$ sont convergentes.
2. Démontrer qu'elles sont égales.
3. Application : pour $n \geq 0$, on considère $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$.

   a) En utilisant 2) montrer que $I = J$.

   b) Calculer $I + J$.

   c) En déduire les valeurs de I et J.