Equations différentielles

Exercice 1 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$;
3. $y' - \frac{y}{x} = x^2$ sur $]0, +\infty[$;
4. $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$;
5. $y' - \frac{2}{t}y = t^2$ sur $]0, +\infty[$;

Exercice 2 :

Soient $C, D \in \mathbb{R}$. On considre la fonction f dfinie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ D \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur C et D pour que f se prolonge par continuité en 0.
2. Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté f, est alors dérivable en 0 et que f' est continue en 0.
3. On considre l'quation diffrentielle $x^2y' - y = 0$. Résoudre cette équation sur les intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.
4. Résoudre l'équation précédente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^x$, $y(0) = y'(0) = 0$;
2. $y'' + 9y = x + 1$, $y(0) = 0$;
3. $y'' - 2y' + y = \sin^2 x$;

Exercice 4 :

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y = \tan(t)$ sur l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.