Série 2

Exercice 1 :

1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$.

Exercice 2 :

En formant une quation différentielle vérifiée par f, calculer la valeur de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} dt.$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 3 :

Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, on dit que le produit de convolution de f et g en $x \in \mathbb{R}$ existe si la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto f(x-t)g(t)$ est intgrable sur $\mathbb{R}$ (pour la mesure de Lebesgue). On pose alors :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt.$$

1) Montrer que $(f * g)(x)$ existe si et seulement si $(g * f)(x)$ existe.
2) a) Soit $1 < p, q < +\infty$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Montrer que si $f \in L^P(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, alors $(f * g)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b) Prouver que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
3) a) Montrer que si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{(f * g)}(x) = \widehat{f}(x)\widehat{g}(x)$.
b) En déduire que l'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'unité pour la convolution.
4) Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation $f * f = f$.

Exercice 4 :

Pour $\alpha > 0$, on pose $f(x) = e^{-\alpha|x|}$.
1) Calculer la transformée de Fourier de f.
2) A l'aide de la formule de réciprocité, en déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
3) Calculer $f \star f$; calculer ainsi la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$.
4) Dterminer la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 5 :

Pour $t > 0$, on pose $q_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$. Calculer la transformée de Fourier de q_t. En déduire que $q_t \star q_s = q_{s+t}$ (la famille (q_t) s'appelle semi-groupe de la chaleur).

Exercice 6 :

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\xi \mapsto \xi \hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que f concide presque partout avec une fonction g de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ que l'on dterminera.

Exercice 7 :

Le but de cet exercice est de rechercher des fonctions u intégrables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|} u(s) ds,$$

o β est un réel strictement positif.

1) On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|}$. Calculer la transformée de Fourier de f.

2) Ecrire cette équation sous forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution.

3) On suppose que l'équation admet une solution. Déterminer $\hat{u}$. En déduire que $\beta \in]0, 1/2[$.

4) Réciproquement, on suppose $\beta \in]0, 1/2[$. Démontrer que l'équation admet une unique solution et la déterminer.

Exercice 8 :

1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction caractéristique d'un intervalle $[a, b]$.

2) Soit $\theta(x) = \frac{\sin x}{x}$. La fonction θ est-elle dans L^1? Dans L^2?

3) Calculer sa transformée de Fourier-Plancherel.

Exercice 9 :

On admet les résultats suivants :

i) Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\widehat{fg} = \mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g)$.

ii) $\mathcal{F}(1_{-[a,a]}) = \frac{\sin(2\pi a x)}{\pi x}$ et réciproquement $\mathcal{F}(\sin x/x) = \pi \times 1_{[-1/2\pi, 1/2\pi]}$.

Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on pose

$$Pf(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \frac{\sin y}{y} dy.$$

1) Justifier que Pf est bien définie et est une fonction continue.

2) Montrer que $Pf \in L^2(\mathbb{R})$ (on s'aidera des rappels, et on pourra écrire $f = \mathcal{F}(g)$).

3) En déduire que $\|Pf\|_2 \leq \|f\|_2$, et que $P \circ P = P$.