TD d'Algèbre 2

Série 1: Matrices et déterminants

Exercice 1.
On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer, lorsque cela est possible, $A+B$, $3B$, AB, BA, A^2, B^2, ${}^tA$, ${}^tB$, A^tA, B^tB, ${}^tA^tB$ et ${}^tB^tA$.

Exercice 2.
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices suivantes : AB, BA, A^2, B^2, $A^2 - B^2$, $(A+B)(A-B)$, $A^2 + B^2 + 2AB$ et $(A+B)^2$.

Exercice 3.
On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer A^2 et montrer que $A^2 + A = 2I_2$.

2) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.

3) Ecrire la matrice A^{-1}.

Exercice 4.
Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix},\ D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ et } D_5 = \begin{vmatrix} 1+i & 1-2i & 1+i \\ 1-2i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1+i & 1-2i \end{vmatrix}$$

Exercice 5.
Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et } C = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels quelconques.

1) Calculer A^2 et A^3.

2) Calculer A^n pour tout entier n strictement positif.

3) En remarquant qu'il existe une matrice N telle que $A = aI_2 + bN$, retrouver le résultat précédent en utilisant la formule du binôme de Newton.

Exercice 7.
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est symétrique si $A = A^T$.

1) Que peut-on dire de la taille d'une matrice symétrique ?

2) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, MM^T et M^TM sont symétriques.

Exercice 8.
Mettre sous forme matricielle et résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y+z & = & 3 \\ 3x-y-2z & = & 0 \\ x+y-z & = & -2 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 10 \\ x-y+z+t & = & 6 \\ x+y-z+t & = & 4 \\ x+y+z-t & = & 4 \end{array} \right. .$$