

---

**Feuille de TD 1 – Probabilités**

---

**Exercice 1**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace probablisable. Montrer que :

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .
2. Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille (finie ou infinie) d'événements de  $\mathcal{A}$ , alors  $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ .
3. Si  $A \in \mathcal{A}$  et  $B \in \mathcal{A}$ , alors  $A - B \in \mathcal{A}$  et  $A \Delta B \in \mathcal{A}$ .

**Exercice 2**

Montrer que l'intersection de deux tribus est une tribu, mais la réunion de deux tribus n'est pas, en général, une tribu.

**Exercice 3**

Soit  $\Omega$  un ensemble,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  et  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ .

Montrer que :

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{C})$$

où  $\sigma(\mathcal{A})$  et  $\sigma(\mathcal{C})$  sont respectivement les tribus engendrées par  $\mathcal{A}$  et par  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 4**

1. Montrer que si  $A$  et  $B$  sont deux événements indépendants tels que  $A$  entraîne  $B$ , alors on a : ou  $P(B) = 1$  ou  $P(A) = 0$ .
2. Montrer que si  $A$  est indépendant de lui-même, alors  $P(A) = 0$  ou  $1$ .
3. Montrer que  $P(A) = 0$  ou  $1$ , alors  $A$  est indépendant de tout événement.
4. En déduire que la relation d'indépendance est symétrique mais n'est pas réflexive.

**Exercice 5**

Une urne  $A$  contient 2 boules blanches et 3 noires, une autre urne  $B$  contient 4 boules blanches et 3 noires ; on tire au hasard une boule de l'urne  $A$  et sans la voir on la met dans  $B$  ; puis, on tire une boule de  $B$  et elle est noire.

Quelle est la probabilité que la boule passée de  $A$  en  $B$  était blanche ?

**Exercice 6**

Soit l'espace probablisable  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ . On considère la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$  où  $\alpha$  est un réel positif non nul. Pour tout événement

$A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ , on pose  $P(A) = \int_A f(x) dx$ .

Montrer que  $P$  est une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ .

**Exercice 7**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé. Soit  $X$  une v.a. définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

1. Montrer que  $X^2$  et  $\frac{1}{X}$  si  $\{X = 0\} = \emptyset$  sont aussi des v.a.
2. Soient maintenant  $a$  et  $b$  deux constantes réelles. Montrer que  $aX + b$  est une v.a. sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .
3. Soit  $F$  la fonction de répartition de  $X$ . Calculer les fonctions de répartition de  $|X|$  et de  $aX + b$ .

**Exercice 8**

Sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé, on définit la v.a.  $\mathbb{I}_A$  indicatrice d'un événement  $A \in \mathcal{A}$ , par :  $\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$

Donner la fonction de répartition de l'indicatrice  $\mathbb{I}_A$  d'un événement  $A$  dont la probabilité est égale à  $p$ .

**Exercice 9**

On donne la v.a. continue  $X$  de densité de probabilité  $f_X$ . On considère la v.a.  $Y = kX$  avec  $k$  est un réel positif non nul.

Trouver la fonction de densité  $f_Y$  de  $Y$  et vérifier que c'est bien une densité de probabilité.

**Exercice 10**

Supposons que la v.a.  $X$  représentant le point donné par un dé.

Quelle est la loi de probabilité et la fonction de répartition de la v.a.  $Y = 2 + X^2$ .

**Exercice 11**

On dit qu'une v.a.  $X$  est distribuée symétriquement autour de  $a$  si

$$P(X \geq a + x) = P(X \leq a - x), \forall x.$$

Soit  $X$  une v.a. symétrique autour de  $a$ . Montrer que :

1. Si  $F$  est la fonction de répartition de  $X$ , on a :  $F(a-x) = 1 - F(a+x) + P(X = a+x)$ .
2. Si  $f$  est la fonction de densité de la v.a. continue  $X$ , on a :  $f(a-x) = f(a+x)$ .
3.  $E(X) = a$ .