TD d'Algèbre 2

Série 3: Applications linéaires, Diagonalisation & Applications

Exercice 1.

1) On considère les applications de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définies par :

$$f : (x, y) \mapsto (x, 0) \text{ et } g : (x, y) \mapsto (0, y).$$

i. Vérifier que f et g sont linéaires.

ii. Calculer $f \circ f, g \circ g, f + g, f \circ g$ et $g \circ f$.

2) L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f((x, y, z)) = (xz, yz)$$

est-elle linéaire ?

Exercice 2.

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f((x, y, z)) = (x - y, y - z).$$

1) Déterminer $Ker(f)$.

2) f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 3.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f((x, y, z)) = (x + 2y + z, x - 2y + z)).$$

1) Déterminer la matrice A associée à f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

2) Soient $f_1 = (1, 0, -1)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1)$, $v_1 = (1, 1)$, et $v_2 = (1, -1)$. Vérifier que $\mathcal{B}_3 = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice A' associée à f par rapport aux bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$.

3) Trouver une base $\mathcal{B}'_2$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice associée à f par rapport aux bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}'_2$ soit :

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Soient $a = e_1 - e_2 + e_3$, $b = 2e_1 - e_2 + e_3$, $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que $\mathcal{B}' = \{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

3) Calculer P^{-1}.

4) Déterminer la matrice R de u dans la base $\mathcal{B}'$.

5) Exprimer A en fonction de R, calculer R^4 et en déduire les valeurs de A^{4n}, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5.
Soit M la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivante $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres.

2) Montrer que M est diagonalisable.

3) Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.

4) On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.

Exercice 6.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de f.

2) Déterminer les sous-espaces propres de f.

3) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4) Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.