
Feuille de TD 3 – Probabilités

Exercice 1

On veut montrer qu'une v.a. qui suit une loi géométrique n'a pas de mémoire. Pour cela, on considère une v.a. X qui suit une loi géométrique de paramètre p avec $0 < p < 1$, alors, montrer que pour tout $k_0 \geq 0$ et $k > 1$:

$$P(X \geq k_0 + k | X > k_0) = P(X \geq k)$$

Exercice 2

Soit X une v.a. qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda (\lambda > 0)$ et Y une v.a. qui prend ses valeurs dans \mathbb{N} . On suppose que n entier naturel, $\{Y/X = n\} \sim \mathcal{B}(n, p)$. Déterminer la loi Y .

Exercice 3

Montrer que X est une v.a. suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \frac{\lambda}{n} P(X = n - 1)$.

Exercice 4

Soit X une v.a. qui suit une loi binomiale de paramètres n et p .

1. Montrer que la v.a. $Y = n - X$ suit une loi binomiale de paramètres n et $1 - p$.
2. Montrer que $P(X = k) = \frac{(n - k + 1)p}{k(1 - p)} P(X = k - 1)$. Recalculer $P(X = k)$ par récurrence.

Exercice 5

Soit X une v.a. qui suit une loi normale centrée réduite ($X \sim \mathcal{N}(0, 1)$). On considère la v.a. $Y = X^2$

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y .
2. En déduire la fonction de densité f_Y de Y .

Exercice 6

Soit X une v.a. qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On considère la v.a. $Y = \sin X$

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y .
2. En déduire la fonction de densité f_Y de Y .

Exercice 7

On dit qu'une v.a. Y suit une loi Log-normale de paramètres μ et σ , et on note $Y \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma)$, si la v.a. $X = \ln Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

1. Déterminer la fonction de densité f_Y de Y .
2. Exprimer la fonction répartition F_Y de Y en terme de la fonction de répartition d'une v.a. normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 8

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, majorer la probabilité pour que la v.a. X d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ s'écarte de μ à moins de 3σ .

Exercice 9

Soient X et Y deux v.a. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$. Montrer que la distribution conditionnelle de X par $X + Y$, est une loi binomiale.

Exercice 10

Soient X et Y deux v.a. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$. α et β étant deux nombres tels que $\alpha \leq \beta$. Calculer $P(X = \alpha / X + Y = \beta)$.

Exercice 11

Soit une v.a. X qui suit la loi exponentielle de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

Établir dans quelles conditions existent l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $Y = e^X$ et quelle est leur valeur.