Filière : SMA - S6
Module : Probabilités
Année Universitaire : 2021–2022

Université Mohamed Premier
Faculté Pluridisciplinaire -Nador
Département de Mathématiques

Feuille de TD 5 – Probabilités

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que $\mathbb{E}\left(X^2\right) < +\infty$ et $\mathbb{E}\left(X^2\right) < +\infty$.

1. Montrer que $|YX| \leq X^2 + Y^2$. En déduire que les variables aléatoires réelles X, Y et XY sont intégrables suivant $\mathbb{P}$.
2. En étudiant le signe de l'expression $\mathbb{E}\left[(X+\alpha Y)^2\right]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, prouver **l'inégalité de Cauchy-Schwarz** :
$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}\left(X^2\right)}\sqrt{\mathbb{E}\left(Y^2\right)}.$$
En donner une interprétation géométrique.

Exercice 2

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire tel que $\mathbb{E}\left(|X|^2\right) < +\infty$.

1. Montrer que la variable aléatoire réelle $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$ est de carré intégrable.
2. Démontrer la relation
$$\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$$

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}_1(0,1)$. On pose
$$Y = X\mathbb{1}_{[0,\pi]}(|X|) - X\mathbb{1}_{]\pi,+\infty[}(|X|)$$

1. Vérifier que, pour toute application h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
$$h(Y) = h(X)\mathbb{1}_{[0,\pi]}(|X|) + h(-X)\mathbb{1}_{]\pi,+\infty[}(|X|)$$
2. Montrer que la variable aléatoire réelle Y suit la loi normale réduite centrée.
3. Le vecteur aléatoire (X, Y) est-il gaussien ?
4. Le couple de variable aléatoire réelle (X, Y) est-il indépendant ?

Exercice 4 (Similaire de l'exemple Rademacher de chapitre 5)

Soient X une variable aléatoire réelle gaussienne centrée réduite et Y une variable aléatoire réelle indépendante de X, ne prenant que les valeurs $+1$ et -1 avec $\mathbb{P}(Y=1) = p$ $(0 \leqslant p \leqslant 1)$.

On pose $Z = XY$.

1. Quelle est la loi de Z ? Le couple (X, Z) est-il gaussien ?
2. Montrer que pour tout $p \in [0;1]$, X et Z ne sont pas indépendantes.
3. Montrer cependant que pour p bien choisi, $\operatorname{Cov}(X, Z) = 0$.