Chapitre 2:
Intégrales simples et primitives

Boua Hamid
Faculté polydisciplinaire-Safi-
Module: Analyse 2
SMP-SMC

2 mai 2021

Sommaire

Sommaire

Définition

On appelle subdivision d'ordre n de l'intervalle $[a,b]$ toute partie finie, $\sigma = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$ de $[a,b]$ telle que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

○ On note $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ un intervalle de la subdivision et $l_k = x_{k+1} - x_k$ sa longueur.

○ Le nombre $\Pi_\sigma = \max_{0 \le k \le n-1} l_k$ est dit pas de la subdivision.

Exemple

La subdivision équidistante d'ordre n est la subdivision obtenue en découpant l'intervalle $[a,b]$ en n intervalle de même longeur : $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ avec $k = 0, \dots, n$, $l_k = \dfrac{b-a}{n}$ et $\Pi_\sigma = \dfrac{b-a}{n}$

Définition

Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$, soit $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ une subdivision de $[a, b]$, et soit $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des réels tels que, pour chaque i, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. On appelle somme de Riemann de f associée à σ et aux ξ_i la somme définie par :

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, la somme de Riemann $S(f, \sigma, \xi)$ tend vers une limite finie, cette limite est noté par $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et est appelée l'intégrale de f sur $[a, b]$

Corollaire

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$$

Exemple

Soit $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(1+\frac{k}{n})} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x}$ on a : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\log(1+x)]_0^1 = \log(2)$$

Sommaire

Proposition

Soit $c \in]a,b[$ et f une fonction continue sur $[a,b]$, alors on a la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Propsition

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, alors on a :

1. $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
2. Pour tout λ réel, $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$
3. Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$
4. Si $f \leq g$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Convention

1. Si f est définie au point a alors $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. Si $a > b$ et si f est continue sur $[b, a]$ alors $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Corollaire

Si f est continue sur $[a, b]$, on a : $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que g garde un signe constant sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$

Sommaire

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition

Une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si : F est dérivable sur I et $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$.

Proposition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si F est une primitive de f sur I alors :

1. $F + K$, avec $K \in \mathbb{R}$, est une primitive de f sur I.
2. Toute primitive G de f sur I est de la forme $G = F + K$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Une primitive de f est appelée intégrale indéfinie de f et est notée $\int f(x) = F + K$.

Théorème

Si f est continue sur I et $a \in I$, alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur I

Proposition

Soit f une fonction continue sur I.

1. Pour toute primitive G de f sur I, on a :

$$\int_a^x f(x)dx = G(x) - G(a)$$

2. $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ est la seule primitive de f qui s'annule au point a.

Corollaire

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et u et v deux fonctions dérivables à valeurs dans $[a, b]$. Alors si $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ on a $F'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

Exemple Calculer la dérivé de $h(x) = \int_{-x^2}^{2x^5} e^{\sin(t)}dt$

On a : $h'(x) = 2xe^{\sin(-x^2)} + 10x^4 e^{\sin(2x^5)}$

Primitives des fonctions usuelles

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + K$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + K$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + K$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + K$$

$$\int \frac{-dx}{\sin^2(x)} = cotant(x) + K$$

$$\int e^x dx = e^x + K$$

$$\int chx \ dx = shx + K$$

$$\int shxdx = chx + K$$
$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + K$$
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + K$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + K$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = argshx + K = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + K$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = argchx + K = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + K$$

Théorème

Soit I un intervalle de I. Si f et g ont des primitives sur I alors $f+\lambda g$ admet aussi une primitive sur I et on a : $\int f+\lambda g = \int f + \lambda \int g$

Théorème (Intégration par parties)

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$, on a alors :

1. $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$
2. $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Exemple

1) Calculer $\int x^2 e^x dx$

On pose $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^2$ donc $f'(x) = e^x$ et $g'(x) = 2x$

$\int x^2 e^x dx = f(x)g'(x) - \int f(x)g'(x)dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$

On pose $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2x$ donc $f'(x) = e^x$ et $g'(x) = 2$

$\int x^2 e^x dx = f(x)g'(x) - \int f(x)g'(x)dx = 2xe^x - \int 2e^x dx$

Donc $\int x^2 e^x dx = 2xe^x - 2e^x + K$, d'où

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + K = (x^2 - 2x + 2)e^x + K$$

2) Calculer $\int \sin(x)e^x dx$

On pose $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = e^x$ $f'(x) = \cos(x)$, $g'(x) = e^x$

$$\begin{aligned}\int \sin(x)e^x dx &= e^x \sin(x) - \int \cos(x)e^x dx \\ &= e^x \sin(x) - (e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)dx) \\ &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int \sin(x)e^x dx\end{aligned}$$

Donc $2\int \sin(x)e^x dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x)$

D'où $\int \sin(x)e^x dx = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))e^x + K$

Remarque

Pour calculer $\int P(x)\cos(\beta x)$, $\int P(x)\sin(\beta x)$ ou $\int P(x)e^{\alpha x}$ avec P un polynôme à coefficient réels, on fait des intégration par parties pour diminuer le degré du polynôme P jusqu'à sa disparition.

Théorème (Changement de variables)

Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ de classe C^1 alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

Remarque

Dans la pratique, il suffit d'écrire $x = \varphi(t)$ et $dx = \varphi'(t)dt$.
Si $t = \alpha$ alors $x = \varphi(\alpha)$
Si $t = \beta$ alors $x = \varphi(\beta)$
$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$

Exemples

1) Calculer $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}} dt$

On pose $x = e^t$, on a $dx = e^t dt$.

$t = 0$ alors $x = 1$

$t = 1$ alors $x = e$

$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}} dt = \int_1^e \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_1^e = \arctan(e) - \arctan(1)$

2) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) dt$

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \sin(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \sin(t) dt \end{aligned}$$

On pose $x = \cos(t)$, $dx = -\sin(t) dt$

$I = -\int_1^0 (1 - x^2) dx = \int_0^1 (1 - x^2) dx = [x - \frac{x^3}{3}]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Exemples

1) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin(t)dt$.

On pose $x = \cos(t)$, $dx = -\sin(t)$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin(t)dt = -\int_1^0 x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$.

2) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(t)dt$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t).\cos(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - sin^2(t))^2 \cos dt$.

On pose $x = \sin(t)$, $dx = \cos(t)dt$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(t)dt &= \int_1^0 (1-x^2)^2 dx = \int_0^1 (1 + x^4 - 2x^2)dx \\
&= [x + \frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3}]_0^1 = 1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3} = \frac{8}{15}
\end{aligned}$$