
Série 1

Exercice 1 : Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n}{n^3+1}$ **2**. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ **3**. $u_n = n\sin(1/n)$

4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **5**. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ **6**. $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$

7. $u_n = \dfrac{1}{n!}$ **8**. $u_n = \dfrac{\ln(n^n)}{n!}$ **9**. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

Exercice 2 :

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ **2**. $u_n = a^n n!,\ a \in \mathbb{R}$ **3**. $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$

3. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$. **4**. $u_n = \dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$ **6**. $\left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$.

Exercice 3 : Étudier les séries de terme général suivant :

1. $u_n = \dfrac{n!}{n^{an}},\ a \in \mathbb{R}$ **2**. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$

3. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^{n(-1)^n}$ **4**. $u_n = \dfrac{n^\alpha(\ln n)^n}{n!}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 : On considère la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^k}{k}$, et on note, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k},\ u_n = S_{2n},\ v_n = S_{2n+1}.$$

1. La série est-elle absolument convergente?
2. Démontrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Conclure que la série est convergente.

Exercice 5:

Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{\sin n^2}{n^2}$ **2**. $u_n = \dfrac{(-1)^n\ln n}{n}$ **3**. $u_n = \dfrac{\cos(n^2\pi)}{n\ln n}$