Faculté pluridisciplinaire de Nador
Master : GNSS, S2
Année universitaire 2019/2020

Traitement du Signal Analogique et Numérique Pour les Signaux GNSS

Chapitre 1 : Introduction

Plan

1. Définitions

✓ **Signal:**

- Un signal est représentation physique d'une information envoyée d'une source vers un destinataire. En pratique résultat d'une mesure par un capteur
- On note s(t) un signal où t est généralement le temps et s une tension électrique, une pression, une température…

✓ **Définition d'une information**

- Tout signal imprévisible constitue une information. En effet un signal connu a priori (d'avance) ne nous informe pas puisqu'on le connaît déjà.

✓ **Bruit :**

- Le bruit est un signal indésirable qui est souvent aléatoire. Il altère l'information contenue dans un signal.

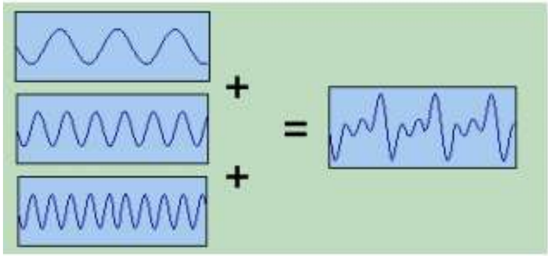
✓ **Traitement du signal :**

- Ensemble de techniques permettant de créer, d'analyser, de transformer les signaux en vue de leur exploitation
- Extraction du maximum d'information utile d'un signal perturbé par le bruit

2. Fonctions du traitement du signal :

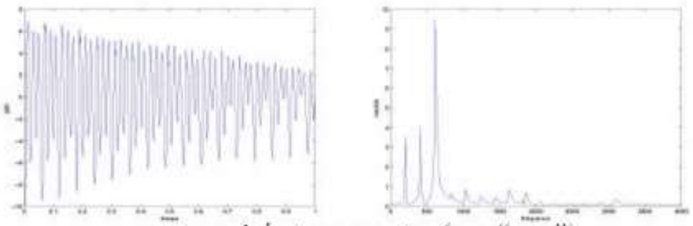
✓ **Synthèse :**

o Création de signaux par combinaison de signaux élémentaires

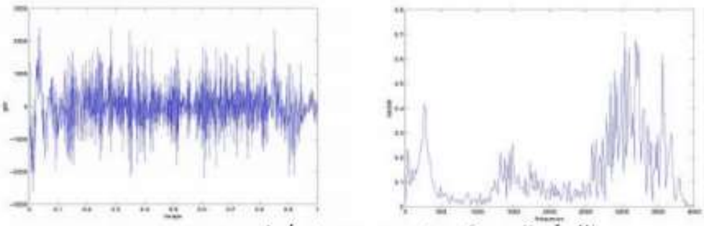


✓ **Analyser :**

- Interprétation des signaux
  - o Détection : isoler les composantes utiles d'un signal complexe , extraction du signal d'un bruit de fond
  - o Identification : classement du signal (identification d'une pathologie sur un signal ECG, reconnaissance de la parole, etc.)



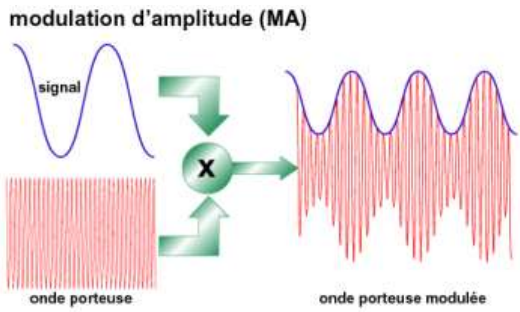
un son voisé et son spectre (son " eu ")



un son non voisé et son spectre (son " ch ")

✓ **Modulation :**

➢ adaptation du signal au canal de transmission



✓ **Transformer :**

➢ adapter un signal aux besoins

✓ **Filtrage :**

➢ élimination de certaines composantes

- Détection de bruit sur une image,
  - Annulation d'écho, etc.

✓ **Codage/compression**

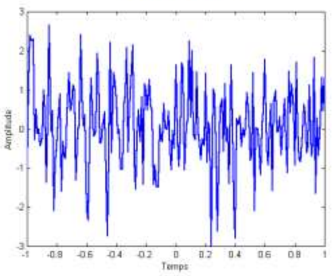
- (Jpeg, mp3, mpeg4, etc.)

3. Classification des signaux

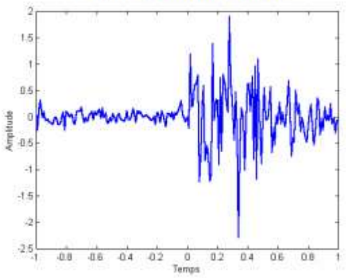
a. Classification phénoménologique

- **Signaux déterministes (certains)**
  - Signaux dont l'évolution en fonction du temps t peut être parfaitement décrite grâce à une description mathématique (sin(t), exp(t), …)
- **Signaux aléatoires (stochastiques)**
  - Signaux dont l'évolution temporelle est imprévisible (comme le bruit), ils contiennent de l'information.
  - La description est basée sur les propriétés statistiques des signaux (moyenne, variance, loi de probabilité, …)
  - **Exemple**
    - ✓ Résultat d'un jet de dé lancé toutes les secondes (moyenne=3.5, écart type :1.87)
    - ✓ Signaux aléatoires stationnaires
      - Stationnaire si les caractéristiques statistiques ne varient pas au cours du temps.

▪ stationnaires



▪ Non-stationnaires



b. Classification énergétique

- Energie et Puissance des signaux

Soit un signal x(t) défini sur $]-\infty,+\infty[$, et T0 un intervalle de temps

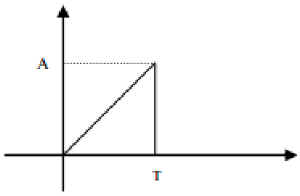
Energie de x(t)

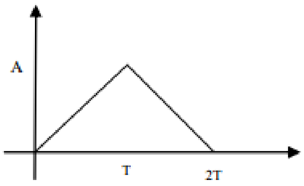
$$\boxed{E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt}$$

Ou

$$E = \lim_{T_0 \to \infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

Exemples :





$$E_{s1} = \int_0^T \left(\frac{At}{T}\right)^2 dt = \frac{A^2 T}{3}$$

$$E_{s2} = 2\frac{A^2 T}{3}$$

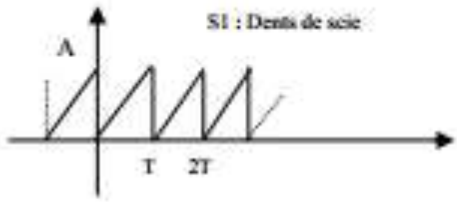
Puissance moyenne de x(t)

$$\boxed{P = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \, dt}$$

- Cas des signaux périodiques de période T

$$\boxed{P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt}$$

Exemple :



La puissance moyenne de ce signal est :

$$P_{s1} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{0} \left| \left(1 + \frac{t}{T}\right) A \right|^2 dt + \frac{1}{2T} \int_0^T \left| \frac{tA}{T} \right|^2 dt = \frac{A^2}{3}$$

- **Signaux à énergie finie**

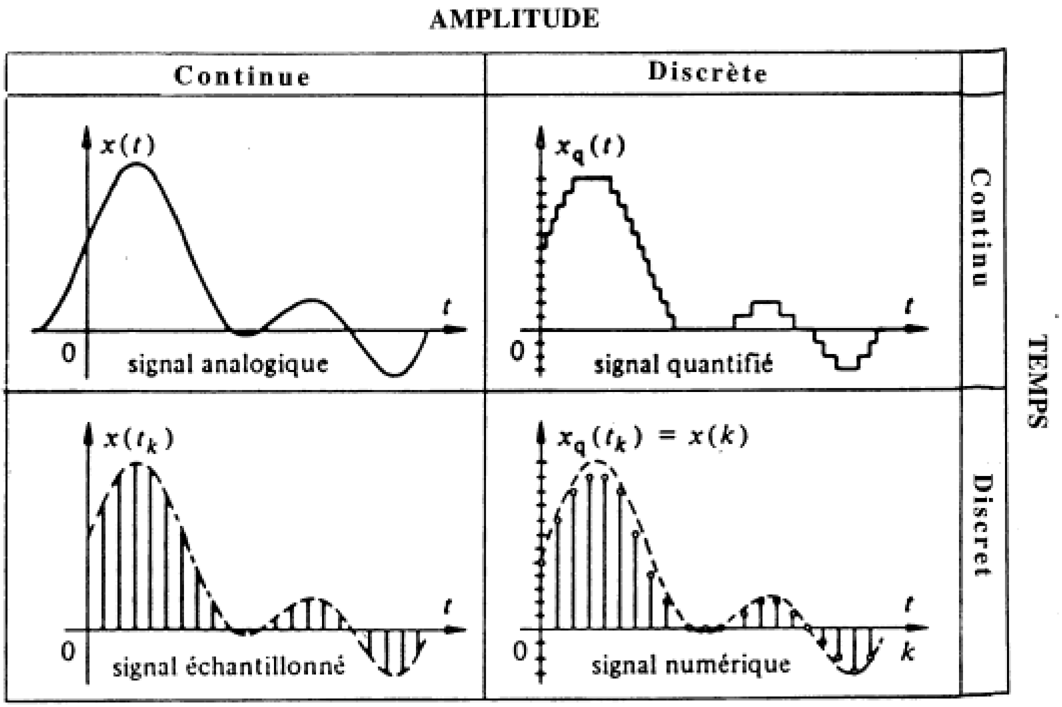
Ce sont les signaux dont l'énergie dans le sens physique s'épuise dans le temps ; tout signal physique limité dans le temps est de cette catégorie.

- **Signaux à énergie infinie**

Cas des signaux périodiques

- Notion valable pour les signaux aléatoires et déterministes

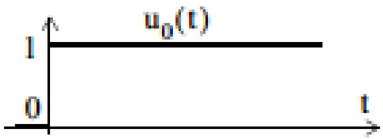
c. Classification morphologique

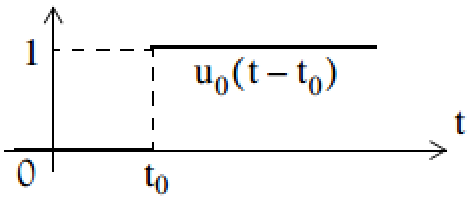


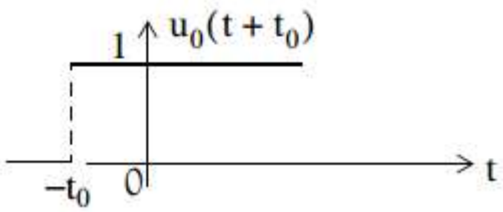
4. Signaux élémentaires continus

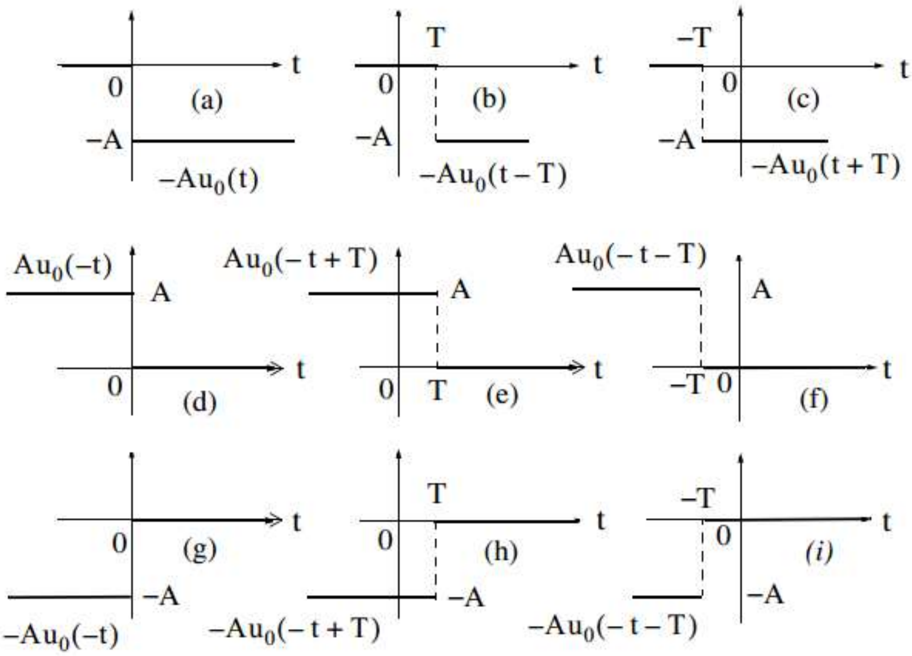
- **Echelon :**

$$u(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 1 & si\ t > 0 \end{cases}$$



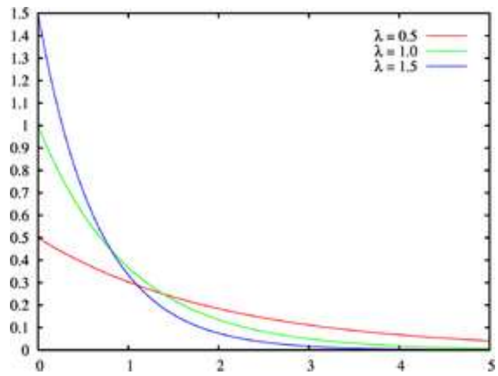






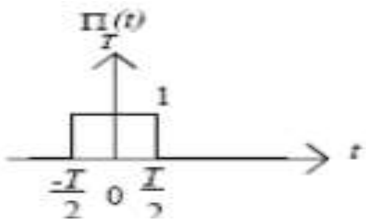
- ### Exponentielle décroissante :

$$v(t) = u(t)e^{-\lambda t} \qquad \lambda > 0$$



- ### Signal porte ou rectangle :

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & si\ |t| \leq \dfrac{T}{2} \\ 0 & sinon \end{cases}$$



- ### Signaux périodiques : sin/cos

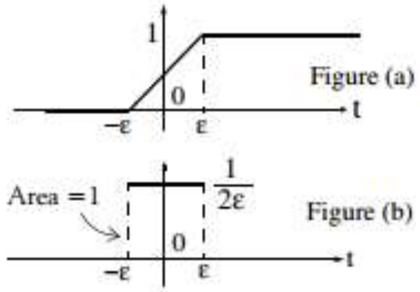
- ### Impulsion de Dirac

  - impulsion de Dirac ou la fonction delta est la dérivée de la fonction échelon:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)}$$

Et $\delta(t) = 0 \; pour \; tout \; t \neq 0$

Pour mieux comprendre la fonction delta,



La fonction de la figure (a) devient une échelon quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Deux propriété utiles de la fonction delta, la propriété d'échantillonnage et la propriété de décalage.

- la propriété d'échantillonnage :

$$\boxed{f(t)\delta(t-\alpha)dt = f(\alpha)\delta(t)}$$

Lorsque a=0

$$\boxed{f(t)\delta(t)dt = f(0)\delta(t)}$$

- la propriété de décalage :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\alpha)dt = f(\alpha)}$$

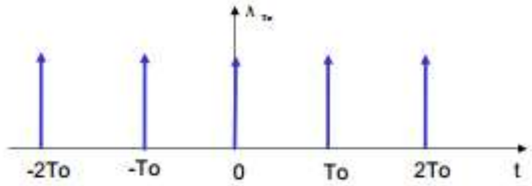
Exemple :

Evaluer les expressions suivantes :

$$\text{a. } 3t^4\delta(t-1) \qquad \text{b. } \int_{-\infty}^{\infty} t\delta(t-2)dt$$

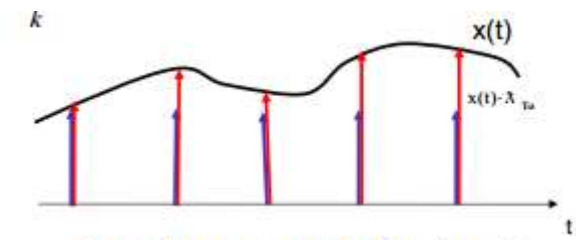
- **Peigne de Dirac**
  - C'est une somme infinie d'impulsions de Dirac régulièrement espacées de To

$$\boxed{Pgn_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - KT_0)}$$



✓ **Propriété**

$$x(t) \cdot Pgn_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(KT_0) \cdot \delta(t - KT_0)$$



Echantillonnage de la fonction $x(t)$

5. Bruit

✓ **Def.:**

- Tout phénomène perturbateur pouvant géner la perception ou l'interprétation d'un signal
- La notion de bruit est relative, elle dépend du contexte :
- Exemple classique du technicien en télécom et de l'astronome :
  - Pour le technicien en télécom :
    - Ondes d'un satellite = signal
    - Signaux provenant d'une source astrophysique = bruit
  - Pour l'astronome :
    - Ondes d'un satellite = bruit
    - Signaux provenant d'une source astrophysique = signal
- Tout signal physique comporte du bruit = une composante aléatoire
  - ➢ Introduction de la notion du rapport signal/bruit

6. Rapport signal sur bruit

Signal =composante déterministe +composante aléatoire

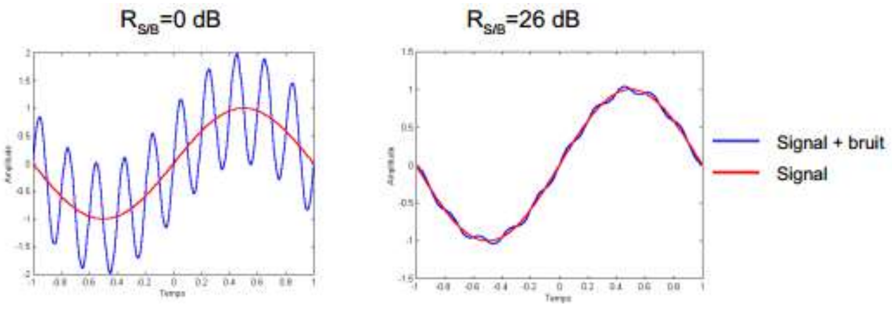
- Déterminer la qualité d'un signal aléatoire ou déterministe => introduction d'un rapport $R_{S/B}$ quantifiant l'effet du bruit.

$$R_{S/B} = \frac{P_s}{P_b}$$

ou

$$R_{S/B}(dB) = 10\log_{10}(R_{S/B})$$

- Ps est la puissance du signal et Pb celle du bruit.



7. Notion d'autocorrélation

✓ **Définition**

- L'autocorrélation réalise une comparaison entre un signal x(t)et ses copies retardées (étude de ressemblance d'un signal avec lui-même au cours du temps)

(a) Pour les signaux à énergie finie (finite duration waveforms)

$$\boxed{C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt}$$

Elle peut être considère comme une énergie, Cxx(0) est l'énergie du signal

(b) Pour les signaux à énergie infinie (infinite duration waveforms)

$$\boxed{C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t-\tau)dt}$$

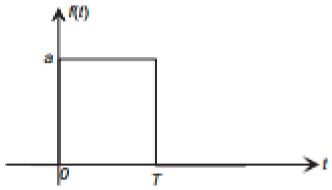
- Elle peut être considère comme une puissance, Cxx(0) est la puissance moyenne du signal

➢ **Pour les signaux périodiques**

$$\boxed{C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)x(t-\tau)dt}$$

Exemple 1 :

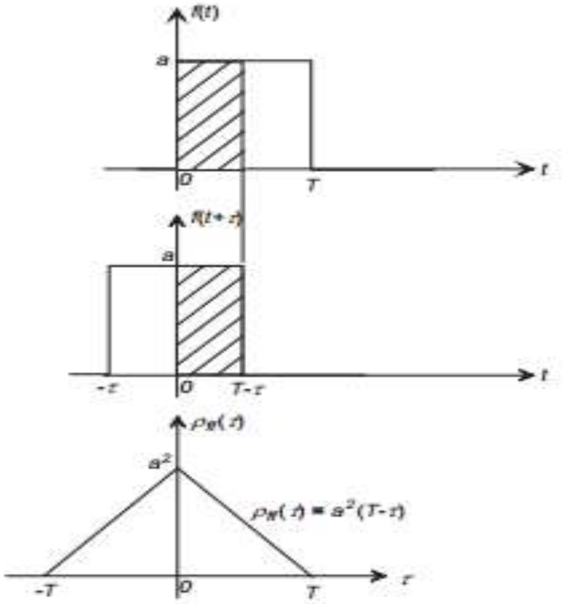
Trouver l'autocorrélation de de la fonction porte suivante :



La fonction a une durée finie, et l'autocorrélation est

$$C_{xx}(\tau) = \int_{0}^{T} x(t)x(t-\tau)dt$$

L'autocorrélation est présente graphiquement ci-dessous :



$$C_{ff}(\tau) = \int_{0}^{T-\tau} a^2\, dt = \begin{cases} a^2(T-|\tau|) & -T \leq \tau \leq T \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

Exemple 2 :

Trouver l'autocorrélation de $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$

Puisque f(t) est périodique, l'autocorrélation est définie par la moyenne sur une période

$$C_{ff}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)x(t-\tau)dt$$

Et avec $t_0 = 0$

$$C_{ff}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \sin(\omega t + \varphi)\sin(\omega(t-\tau) + \varphi)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\cos(\omega t)$$

Et on voit que $C_{ff}(\tau)$ est périodique de période T et elle est indépendante de phase.

- **Propriétés**
    - $|C_{xx}(\tau)| \leq C_{xx}(0)$: Maximum en 0
    - Si x(t) est périodique alors $C_{xx}(t)$ est périodique de même période
    - $C_{xx}(t)$ est paire pour des signaux réels

8. Notion d'intercorrélation

✓ **Définition**

- L'intercorrélation mesure la similitude entre deux signaux x(t) et y(t) retardée.
- **Pour les signaux à énergie finie (signaux de durée finie):**

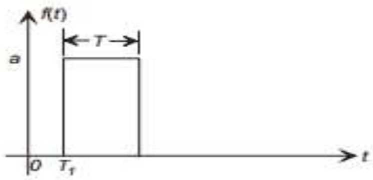
$$\boxed{\boldsymbol{C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t-\tau)dt}}$$

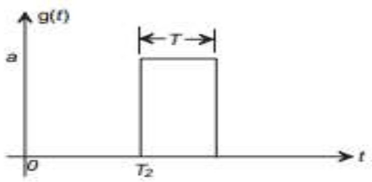
- **Pour les signaux à énergie infinie (signaux de durée infinie):**

$$\boxed{\boldsymbol{C_{xy}(\tau) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)y(t-\tau)dt}}$$

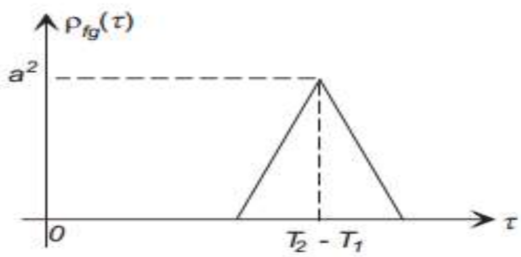
Exemple :

Trouver la fonction intercorrélation entre les fonctions suivantes





Dans ce cas g(t) est la version retardée de f(t). L'intercorrélation est



Avec le maximum se trouve à $\tau = T_2 - T_1$ (le retard entre les deux signaux)

✓ **Propriétés de l'intercorrélation :**

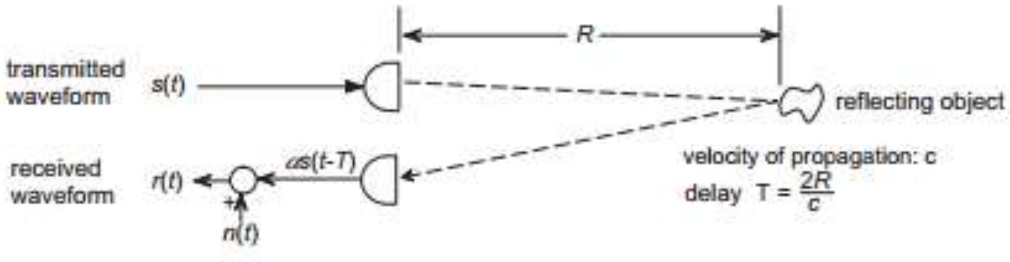
1- $C_{xy}(\tau) = C_{xy}(-\tau)$

2- si $C_{xy}(\tau) = 0$ pour tout τ, donc x(t) et y(t) sont non corrélées.

3- si $x(t) = ay(t - T)$, avec a constante, donc $C_{xy}(\tau)$ aura un maximum a $\tau = T$. l'intercorrélation est souvent utilisée dans l'estimation optimale du retard, comme dans l'écholocation (Radar, sonar) et dans les récepteurs GPS.

Exemple 3 :

Un système d'écholocation, un signal transmis s(t) est réfléchi sur un objet à une distance R et il est reçu à un instant T=2R/c sec. Le signal reçu $r(t) = \alpha s(t - T) + n(t)$ est atténué par un facteur α et il a contamine par le bruit additive n(t).



$$\boldsymbol{C_{sr}(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{s(t)r(t-\tau)dt}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{s(t)(n(t-\tau)} + \alpha s(t - T - \boldsymbol{\tau}))\boldsymbol{dt}$$

$$= \boldsymbol{C_{sn}(\tau)} + \alpha \boldsymbol{C_{ss}(\tau - T)}$$

Et si le signal transmis s(t) et le bruit n(t) sont non corrélés, c.à.d. $C_{sn}(\tau) = 0$, alors

$$\boldsymbol{C_{sr}(\tau)} = \alpha \boldsymbol{C_{ss}(\tau - T)}$$

Cela c'est la version atténuée et retardée de l'autocorrélation de s(t)- qui aura sa valeur maximale à $\tau = T$, ce qui peut être utilisée pour réaliser un estimateur de la distance R.