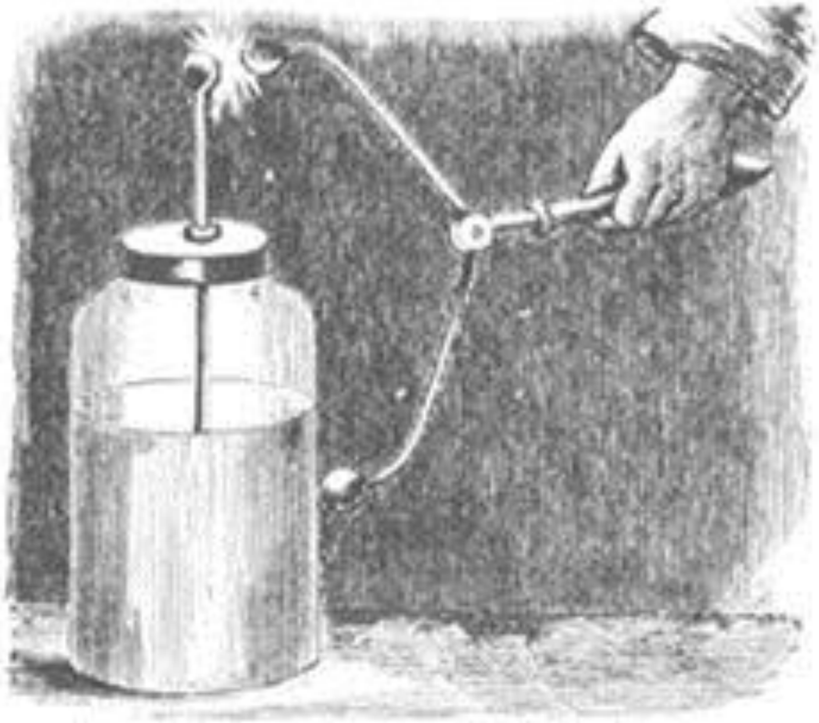
Electrostatique
&
Electrocinétique

-SPMC-

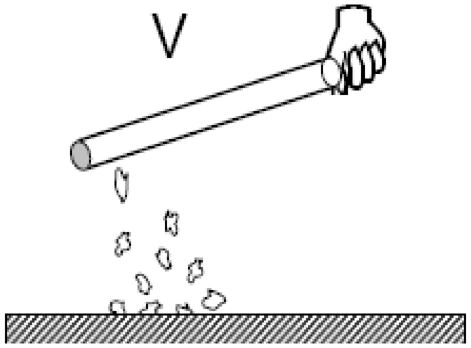
M.ROCHDI

- **Plan**
  - **Électrostatique**
    - **Electrostatique dans le vide**
    - **Dipôle électrostatique**
    - **Conducteurs à équilibre**
    - **Energie électrostatique**
  - **Électrocinétique**
    - **Loi d’Ohm**
    - **Eléments d’un circuit électrique**
    - **Théorèmes généraux sur les circuits**

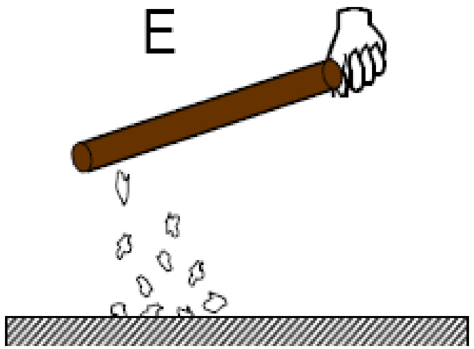
- **Définition**
  - L’électrostatique est la discipline de la physique qui analyse les phénomènes électriques crées par des charges électriques localisées dans l’espace.



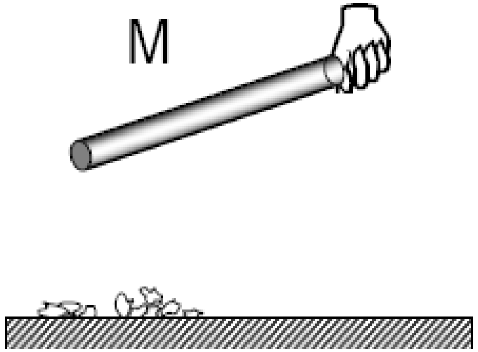
- **Electrisation par frottement (triboélectricité)**
    - **Quelques expériences**



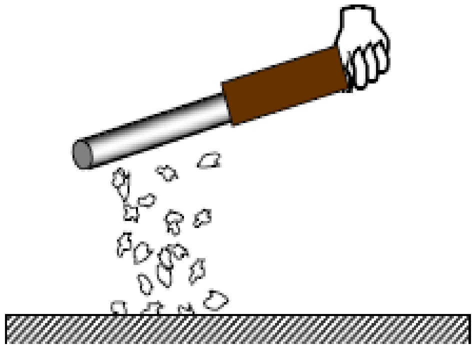
Une tige en verre frottée à l’aide d’un morceau de drap en soie ou en laine



Un bâton d’ébonite frottée à l’aide d’un morceau de drap en soie ou en laine



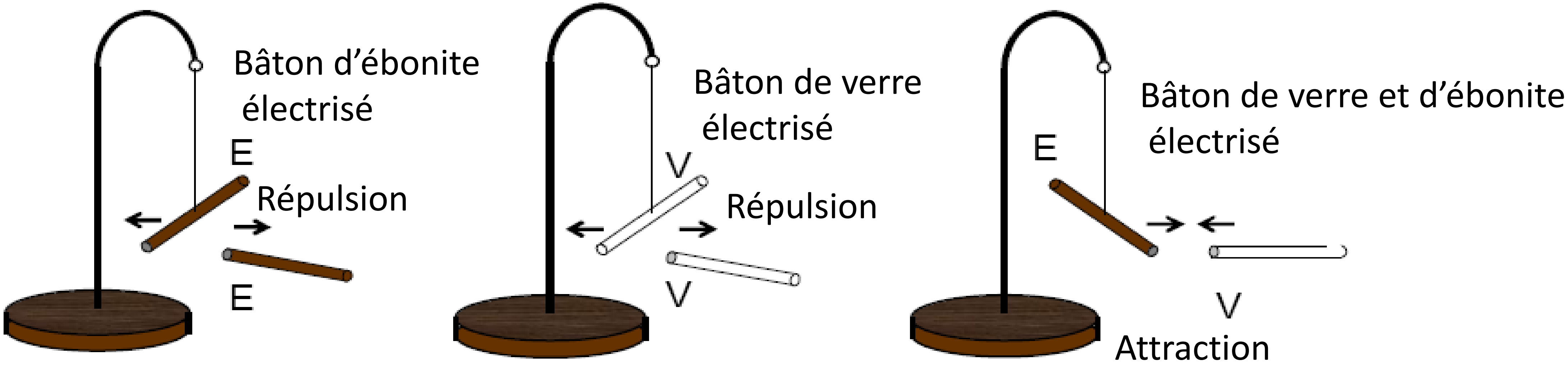
Une tige métallique frottée à l’aide d’un morceau de drap en soie ou en laine



On tient la tige métallique à l’aide d’un manche en bois

Interprétation de ces expériences : On attribue cette propriété, qu’acquiert la matière et qui lui permet d’exercer une force, à l’existence de *charges électriques q*.

- **Mise en évidence des charges positives et négatives**



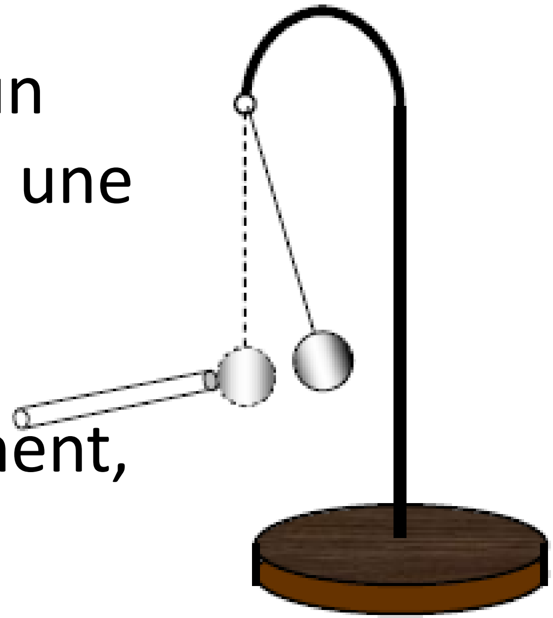
Dans la cas de l'ébonite : c'est l'électricité résineuse; on lui a attribué un signe négatif.

Dans la cas du verre : c'est l'électricité vitreuse; on lui a attribué arbitrairement un signe positif.

ces expériences montrent que : deux corps chargés d'une électricité de même signe, positive ou négative, se repoussent ; par contre ils s'attirent s'ils portent des charges de signes contraires.

• Autres modes d’électrisation

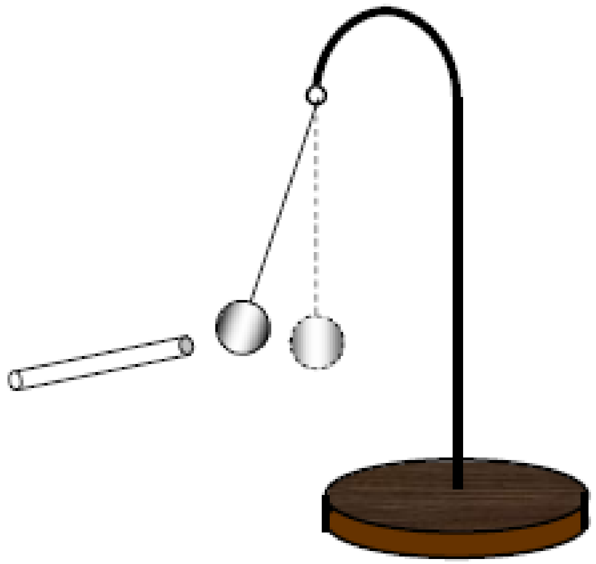
- **<u>Electrisation par contact</u>** : On constitue, à présent, un pendule électrostatique en suspendant au fil de soie une boule de polystyrène recouverte d’une matière conductrice. Celle-ci est initialement neutre. Approchons une tige en verre, électrisée par frottement, de la boule jusqu’au contact.



On constate que la boule est repoussée sous l’effet de son interaction avec la partie électrisée de la tige

Explication: après contact les charges de la tige se répandent sur la boule. Ainsi, les deux corps portent des charges de même signe, il en résulte une répulsion

- <u>Electrisation par **influence**</u>
  - Approchons une tige en verre électrisée de la boule B initialement neutre, sans la toucher. Nous constatons que la boule est attirée par la tige, comme illustré ci-contre. La boule a été électrisée par influence. Lorsqu'on éloigne la tige électrisée, le pendule reprend sa position initiale.

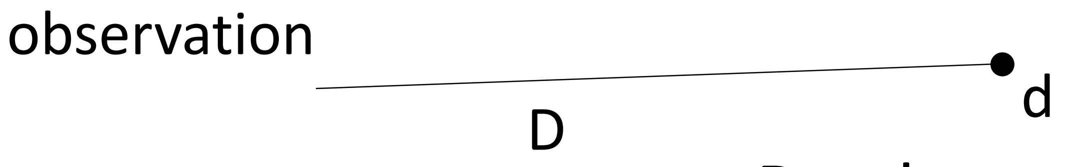


Les expériences précédentes permettent d'énoncer la loi suivante: Deux charges électriques de même signe positif ou négatif, se repoussent ; par contre elles s'attirent si elles sont de signes contraires.

- Charges électriques
  - La **charge électrique** est une caractéristique possédée par certaines particules entre lesquelles s’exercent une **interaction électrique**.
  - Joseph John Thomson et son équipe de physiciens britanniques découvrirent l'**électron** comme **particule** élémentaire ayant la plus faible charge (**négative**) qui soit. La charge s'est révélée être **discrète**
  - En 1886, Eugen ***Goldstein*** avait déjà découvert des **particules positives** dans les rayons émis dans des tubes de décharge sous vide. On les identifia plus tard aux **protons**, particules portant, elles, les plus petites quantités de charges électriques **positives** possibles qui s'avérèrent égales en valeur absolue à celles des électrons...mais de signe contraire.

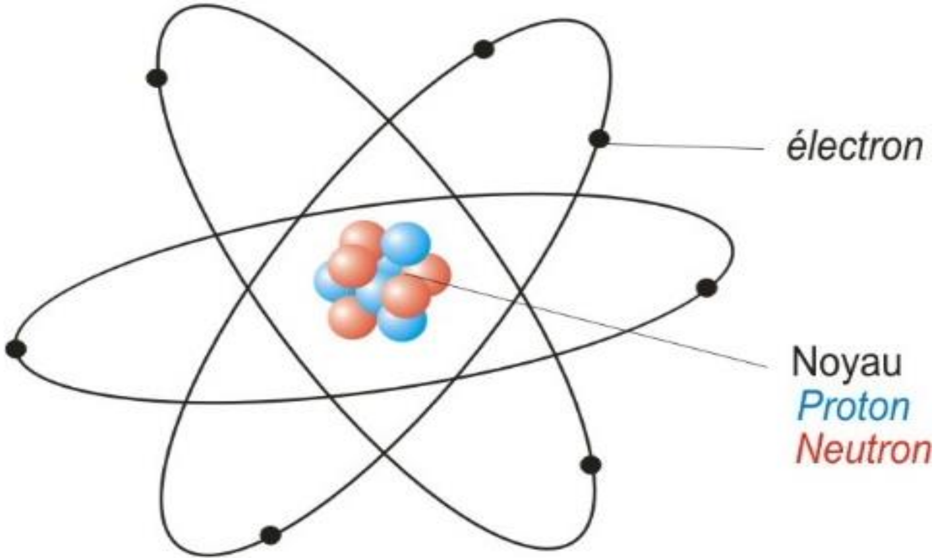
- **Propriétés des charges électriques :**
  - ✓Sont portées par des particules matérielles : électrons, protons pour les plus courantes
  - ✓Sont indestructibles (algébriquement)
  - ✓L’unité de charge électrique est le Coulomb
  - ✓La plus petite quantité d’électricité est ± e, - e étant la charge de l’électron : e = 1,602 10^{-19} Coulomb
  - ✓Toute quantité d’électricité Q est un multiple de Q=±ne avec n entier
  - ✓Les quarks, éléments à partir desquels sont fabriquées les particules élémentaires, peuvent avoir des charges fractionnaires de e, mais comme ils n’existent pas à l’état isolé, ils ne peuvent intervenir dans les lois de l’électricité avec de telles charges (quark up: q = 2/3e ; quark down: q = -1/3e)

- **Le concept de charge ponctuelle**
  - Comme pour la masse, on introduit le concept de charge ponctuelle. C’est une charge dont les dimensions sont suffisamment petites par rapport aux distances d’observation pour être assimilée à un point géométrique.



D>>d

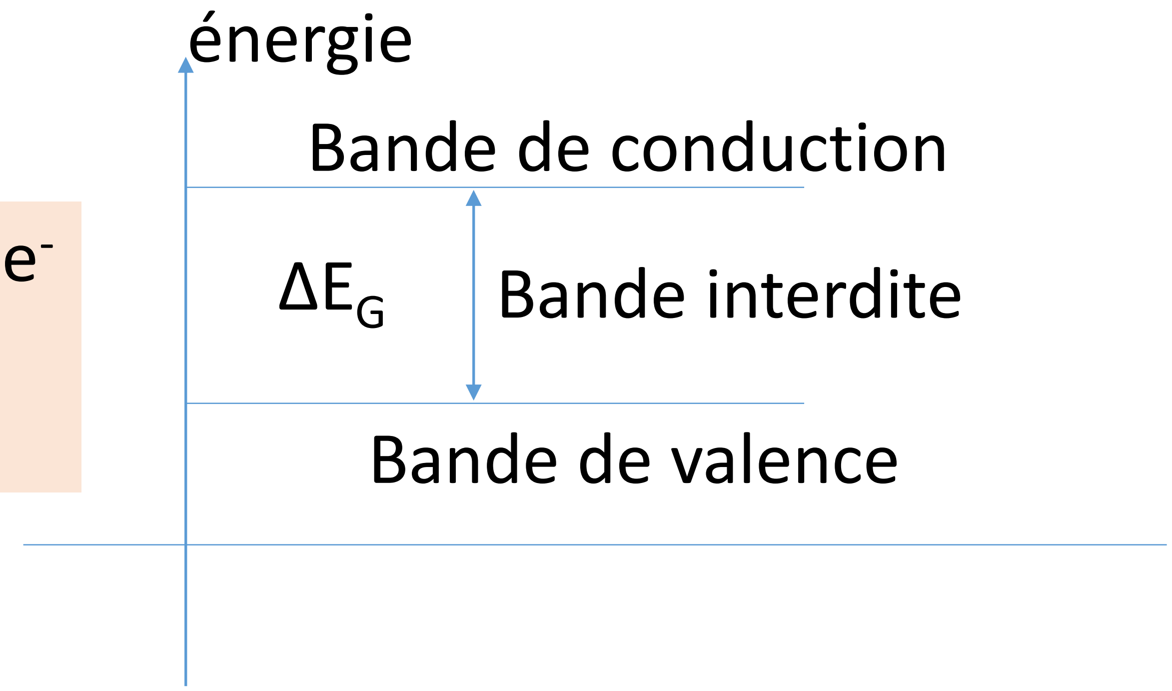
- **Principe de la conservation de la charge électrique**
  - Dans un système isolé la somme algébrique des charges électriques reste constante.
- **L'électrisation et la constitution de la matière**
  - Dans un atome, plus on se rapproche du noyau plus les électrons sont liées au noyau.
  - Le fait de frotter deux corps, électriquement neutres, l'un contre l'autre, entraîne un transfert d'électrons de l'un vers l'autre. Les deux corps ne sont plus neutres, ils sont électrisés.



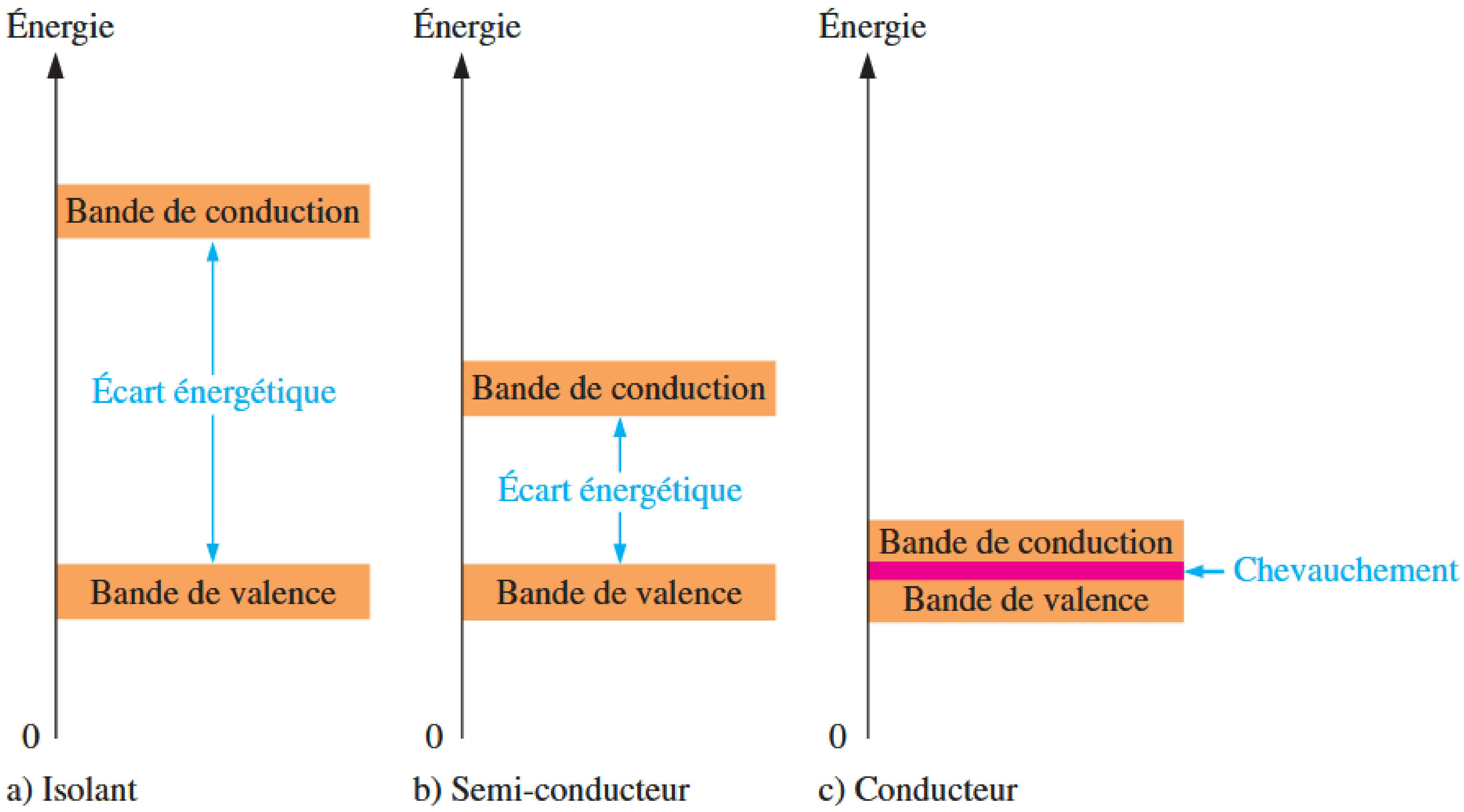
- **Les propriétés électriques des matériaux**
  - Pour pouvoir définir correctement le comportement électrique et les propriétés qui en découlent, il faut faire le point sur certain notions fondamentales de la physique :
    - Selon les lois de la mécanique quantique, les électrons possèdent des énergies quantifiées, appelées niveaux d'énergie.
    - Les électrons des couches périphériques se trouvent attirés par les atomes voisins
    - Après interaction, le niveau d'énergie très précis qui caractérisait l'orbitale considérée dans l'atome isolé s'est transformé en une bande d'énergie.

- **Bandes d'énergie**
  - la couche de valence d'un atome représente une bande d'un certain niveau énergétique et que les électrons de valence sont confinés à cette bande. Lorsqu'un électron acquiert assez d'énergie additionnelle d'une source externe, il peut quitter la couche de valence, devenir un électron libre et exister dans ce que l'on désigne comme étant la bande de conduction

ΔE_G : l'énergie qu'il faut fournir aux e^- pour les faire passer dans la bande de conduction



- **Le comportement électrique des matériaux**

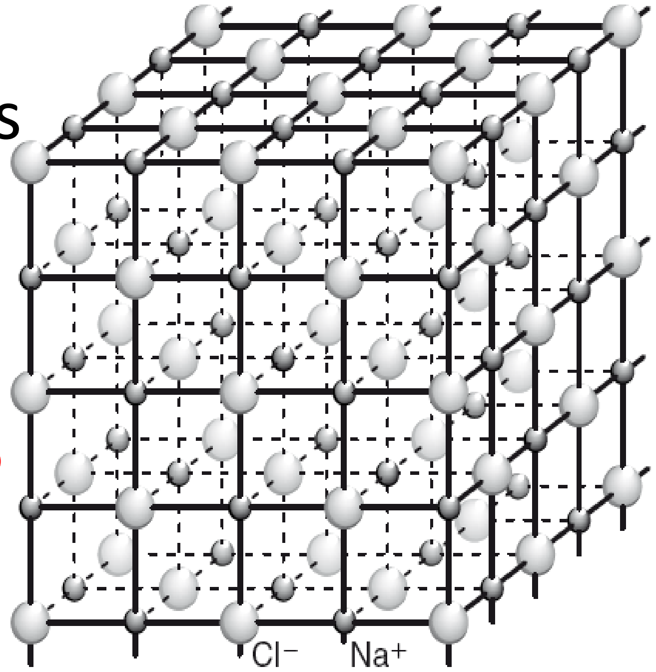


- **Distribution des charges**
  - **Caractérisation d’une distribution de charges**
    - Lorsque nous nous intéressons à un phénomène associé à la présence de charges électriques, il convient de commencer par préciser quelques caractéristiques de la distribution de charges considérée.
      - S’agit-il d’une distribution de charges statiques ou mobiles ?
      - Comment décrire leurs positions, leur quantité ?

- **Charges statiques**
  - Dans le cas d'un matériaux isolant lorsqu'un isolant est chargé électriquement, les temps caractéristiques des déplacements de charges dans ce matériau sont extrêmement longs par rapport au temps nécessaire pour faire une mesure sur le système et pourront être considérés comme infinis.
  - Dans le cas d'un conducteur:
    - Lorsque il n'est soumis à aucune force macroscopique, chaque électron, du fait des collisions, change de vitesse (en module et direction) environ 10^{18} fois par seconde. Moyennée sur des temps plus longs, cette vitesse électronique peut être décrite par une vitesse moyenne nulle.

- **Distribution spatiale**
  - La description de la distribution spatiale des charges dépend de la nature du phénomène étudié, des dimensions caractéristiques associées et du degré de précision souhaité. Ainsi un même ensemble de charges pourra être décrit soit comme:
    - un ensemble de charges ponctuelles isolées.
    - une distribution continue de charges.

- **Exemple** : un cristal de chlorure de sodium NaCl (sel)
  - constitué d'ions positifs Na^+ et d'ions négatifs Cl^-, répartis alternativement au sommet d'un réseau cubique
  - la distance entre les ions étant de l'ordre de l'angström (Å), c'est-à-dire 10^{-10} m.



Déterminer la force exercée sur un ion par tous les autres?

- Méthode1 : considérer tous les ions comme des individualités.
- Méthode 2 :il est suffisant d'accorder ce statut aux seuls ions proches voisins situés à des distances comparables à la distance inter-ionique ; les autres, plus éloignés donc moins facilement différenciables, pourront être considérés comme formant une distribution continue homogène de charges.

Nous voyons donc qu'une même distribution pourra être appréhendée différemment suivant que nous en sommes loin ou près.

- De façon générale:
  - Si on étudie une distribution de charges à des distances du même ordre de grandeur que leur extension spatiale ou que la distance entre charges, il conviendra de considérer ces charges comme isolées et la distribution sera dite discrète
  - Si les dimensions caractéristiques du problème étudié sont grandes devant celles de la distribution de charges, nous pourrons la décrire comme une distribution continue.
- Comment définir et évaluer ce qui est loin et ce qui près ?
  - Cela dépend du degré de précision souhaité.
  - Assimiler un ensemble de charges à une distribution homogène simplifie le calcul mais nous perdons au niveau précision

Il faudra trouver un compromis entre la précision du résultat et la simplification technique associée aux distributions continues.

- **Distribution discrète de charges - Charges électriques ponctuelles**
  - Si la distance entre les charges électriques est du même ordre de grandeur que les dimensions caractéristiques du problème posé, il convient de considérer les corps chargés comme des objets individualisés.
  - Si de plus, le volume de chaque corps chargé est petit devant toutes les autres dimensions du problème, une bonne approximation consiste à identifier chacun de ces corps à un point, sans volume propre, auquel on associe une charge électrique correspondant à la charge totale du corps considéré.

Cette abstraction mathématique est connue sous le nom d'«approximation des charges ponctuelles».

- Dans le cas d’une approximation de charges ponctuelles, chaque charges est caractérisée par:
  - Son vecteur position $\vec{r}_i$
  - Sa charge électrique q

Nous parlerons alors de distribution discrète de charges électriques (q_i, $\vec{r}_i$).

- **Distribution continue de charges électriques**
  - Si toutes les dimensions du problème posé sont plus grandes que l'extension spatiale de la répartition des charges électriques
  - Si les charges portées par les corps constituant le système étudié sont très grandes devant la charge élémentaire,

Dans ce cas on peut faire abstraction du caractère discret de ces charges.

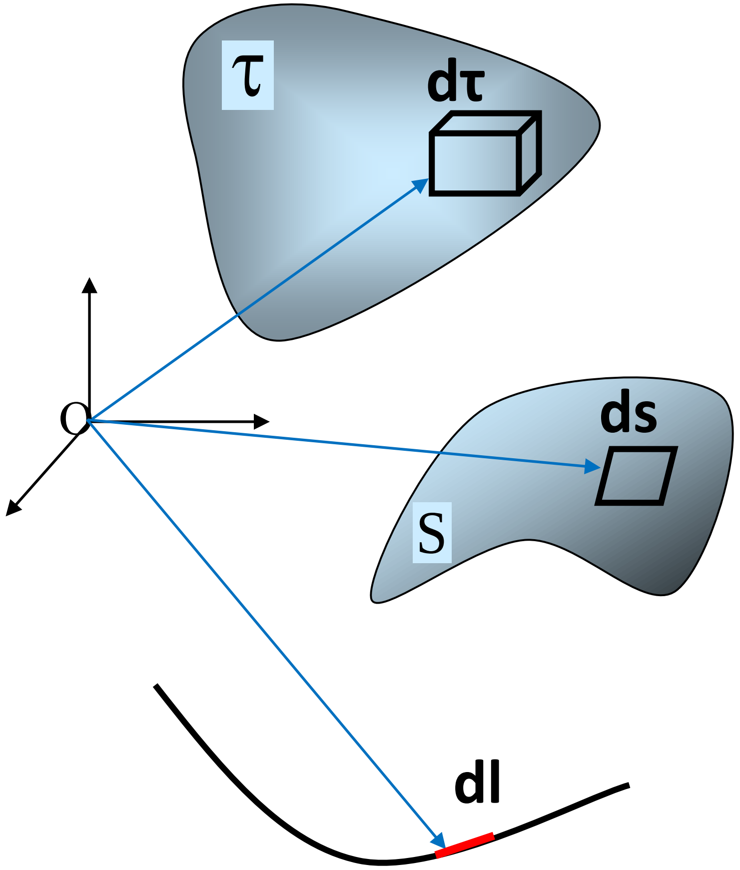
  - La distribution de charges sera dite « continue » et sera caractérisée par une densité moyenne de charges électriques, définie en tout point de l'espace.

- **Densité de charges électriques**
  - Densité est par définition la limite, si elle existe, du quotient de la charge électrique dq contenue dans un petit élément par le volume dτ (la surface ds ou la longueur dl) de ce petit élément quand celui-ci tend vers zéro.

    - la densité volumique de charges $\rho=dq/d\tau$

    - la densité surfacique de charges $\sigma=dq/ds$

    - la densité linéique de charges $\lambda=dq/dl$



- **Exemple :**

  Soit un proton de charge +e = 1,6 10^{-19} C et de diamètre d = 10^{-14} m.

  La densité volumique de charge électrique est donnée par, si la charge est uniformément répartie, $\rho = \frac{e}{\frac{3}{4}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3} \sim 3.10^{23}\ \mathrm{Cm^{-3}}$.

- **Applications technologiques**
  - La peinture électrostatique:
    - On électrise la peinture et l'objet à peindre. Par exemple le pistolet est relié à la borne positive d'un générateur électrostatique et l'objet à la borne négative. Les gouttes attirées par l'objet viennent s'y déposer.
  - Les filtres électrostatiques
    - Ils servent à séparer de petites particules en suspension dans un gaz. Le fonctionnement est semblable à celui de la peinture électrostatique. Les particules sont chargées négativement par une électrode émettrice (cathode), elles sont attirées sur l'anode réceptrice sur laquelle elles se déposent.

- **Force électrostatiques**
  - À l’échelle microscopique, les forces électriques sont omniprésentes, tous les constituants élémentaires de la matière, à l’exception des neutrons, étant électriquement chargés.
  - À l’échelle macroscopique, ces forces sont en général de moyenne nulle, les corps étant à cette échelle, dans la plupart des cas, électriquement neutres.

Pour que l’on puisse observer des forces électriques macroscopiques, elles doivent s’exercer entre des corps ayant rompu leur neutralité de charges.

- **Force entre deux charges ponctuelles**

La force électrostatique existant entre deux charges considérées comme ponctuelles obéit au modèle newtonien. Dans ce modèle, la force d'interaction, présente les caractéristiques suivantes :

  - Elle s'exerce sur des objets de *même nature,* ici des charges électriques.
  - Elle agit *suivant la droite qui* joint les deux objets.
  - Elle est proportionnelle au produit des grandeurs liées aux objets considérés : q_1 et q_2.
  - Elle varie comme l'inverse du carré de la distance entre les deux objets.
  - Elle obéit au principe de l'action et de la réaction $\overrightarrow{F_1}(\overrightarrow{r_2})=-\overrightarrow{F_2}(\overrightarrow{r_1})$
  - Enfin, elle est instantanée.

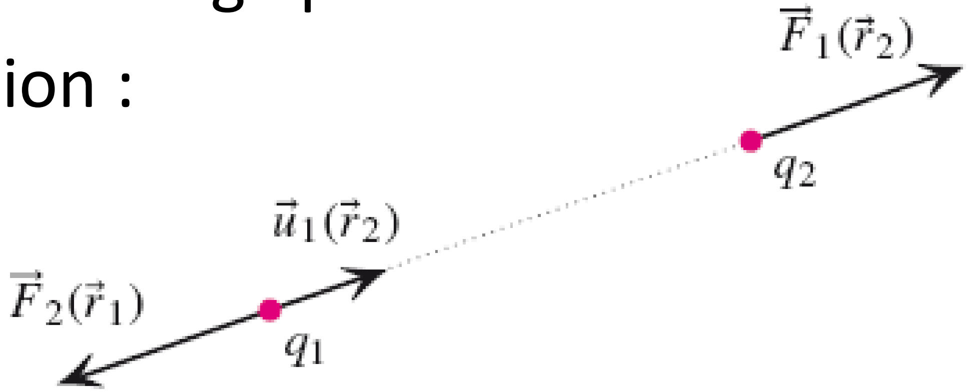
- **Enoncé de la loi e Coulomb**

Selon cette loi, la force $\overrightarrow{F_1}(\overrightarrow{r_2})$ exercée dans le vide par la charge ponctuelle fixe q_1 située à la position $\overrightarrow{r_1}$, sur la charge ponctuelle fixe q_2 située à la position $\overrightarrow{r_2}$, a pour expression :

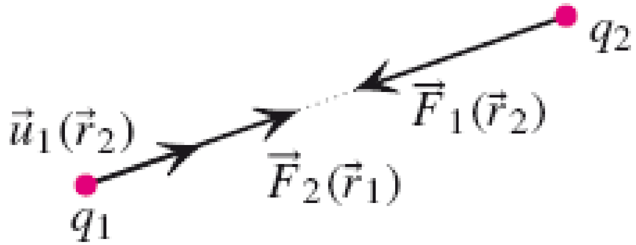
$$\overrightarrow{F_1}(\overrightarrow{r_2}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2}|^2}\overrightarrow{u_1}(\overrightarrow{r_2})$$

- $\overrightarrow{u_1}(\overrightarrow{r_2})$: vecteur unitaire dans la direction q_1q_2
- $|\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2}|$: la distance entre les deux charges
- $\boldsymbol{\varepsilon}_0$: la permittivité diélectrique du vide $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$

  son unité est en farad par mètre (F/m)



a) q_1 et q_2 de même signe



b) q_1 et q_2 de signes opposés

La loi de Coulomb est une loi empirique

- **Exercice**

Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, on suppose que celui-ci est constitué d'un électron, de masse m_e et portant une charge $-e$, qui tourne, sur une trajectoire circulaire de rayon r, autour d'un noyau assimilé à un objet ponctuel. Le noyau de l'atome d'hydrogène ne comporte qu'un proton.

  - Calculer le rapport des deux forces qui interviennent dans ce mouvement : La force électrostatique F_E et la force de gravitation F_G.

on donne : La charge électrique du proton est $+ e$ et sa masse $m_p = 1,67\times10^{-27}$ kg, $e = 1,6\ 10^{-19}$ C, $m_e = 9,11\times10^{-31}$ kg, $r = 5,3\times10^{-11}$ m et G la constante de gravitation $G = 6,67 \times 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$

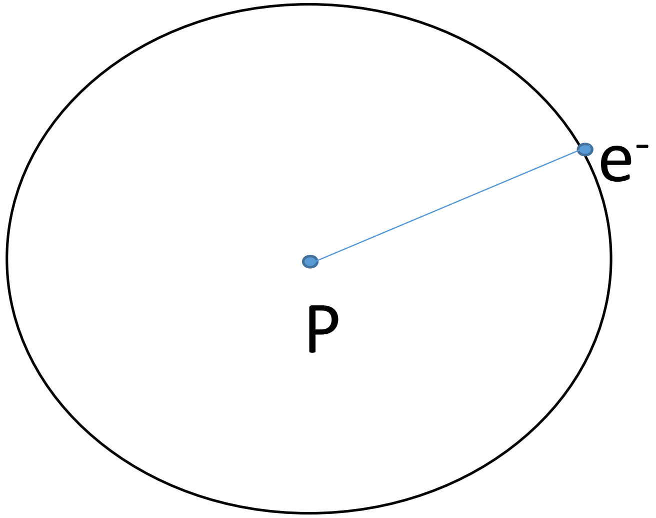
- **Solution**

Calculons les modules des deux forces d'interaction qui interviennent ici :

$$F_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|-e||e|}{r^2} = 8{,}2\ 10^{-8}N$$

$$F_G = G\frac{m_e m_p}{r^2} = 3{,}6\ 10^{-47}N$$

$\frac{F_E}{F_G} = 0{,}23\ 10^{40}$ très grand

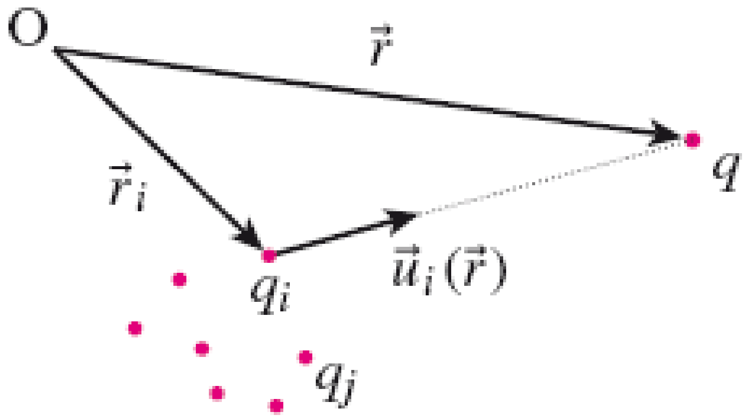


Par conséquent dans tous les problèmes d'électricité les interactions gravitationnelles seront négligées devant les forces d'origine électriques.

- **Remarques** :
  - À l'échelle du noyau, la cohésion est assurée par **l'interaction nucléaire forte**.
  - À l'échelle de l'atome c'est **l'interaction électrostatique** noyau/électron qui assure la cohésion des édifices.
  - À l'échelle macroscopique (humaine) c'est encore **l'interaction électrostatique** qui est responsable de la cohésion de la matière et de ses propriétés (solidité d'un fil, fluidité de l'eau…).Mais entre deux objets globalement neutres les interactions électrostatiques sont nulles ; c'est alors **l'interaction gravitationnelle** qui devient prépondérante. C'est elle qui assure la cohésion de la matière à l'échelle astronomique.

- **Principe de superposition**

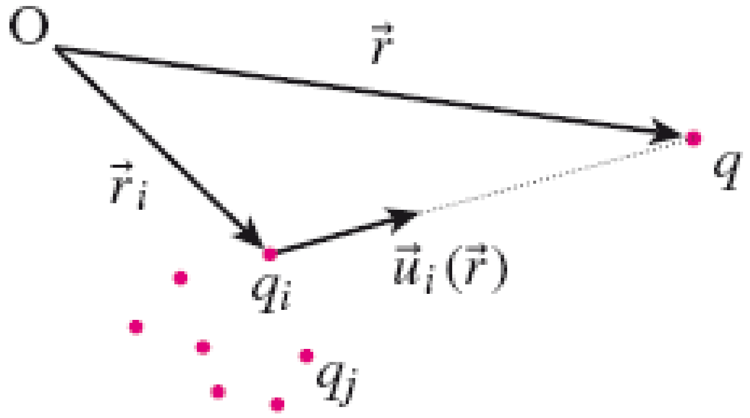
le principe de superposition permet de déterminer la force exercée par une distribution discrète de charges (q_i, $\vec{r_i}$) sur une charge q placée au point $\vec{r}$.



  - L'expérience a permis de montrer que la présence d'autres charges ne modifie pas la force entre deux charges particulières.
  - La force résultante obéit à la règle générale de composition des forces et est égale à la simple somme vectorielle de toutes les contributions associées aux différentes paires (q, q_i).

- La force $\vec{F}\,(\vec{r})$ exercée sur la charge q, située au point $\vec{r}$, par un ensemble de charges q_i situées en $\vec{r}_i$, est égale à

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q q_i}{|\vec{r}-\vec{r_i}|^2}\overrightarrow{u_i}(\vec{r})$$



- **Force entre une charge ponctuelle et une distribution continue de charges**
  - L'expression de la force obtenue pour une distribution discrète de charges se généralise facilement au cas des distributions continues. Il convient de :
    - Calculer dans un premier temps, La force entre la charge ponctuelle q et la charge dq' contenue dans un élément infinitésimal de la distribution continue de charges centré en un point $\overrightarrow{r'}$.
    - Dans un second temps, conformément au principe de superposition, toutes ces différentes contributions sont sommées sur tout le domaine occupé par la distribution continue.

- Pour une distribution linéique de charges :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda\left(\overrightarrow{r'}\right)dl\left(\overrightarrow{r'}\right)}{\left|\overrightarrow{r'} - \vec{r}\right|^2}\vec{u}(\vec{r})$$

- Pour une distribution surfacique de charges :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma\left(\overrightarrow{r'}\right)ds\left(\overrightarrow{r'}\right)}{\left|\overrightarrow{r'} - \vec{r}\right|^2}\vec{u}(\vec{r})$$

- Pour une distribution volumique de charges :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_v \frac{\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)d\tau\left(\overrightarrow{r'}\right)}{\left|\overrightarrow{r'} - \vec{r}\right|^2}\vec{u}(\vec{r})$$

- **Forces entre distributions continues de charges**
  - la force entre deux distributions volumiques de charges, V_1et V_2 s'écrit :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V_1}\iiint_{V_2}\frac{\rho_1\left(\overrightarrow{r'}\right)\rho_2(\vec{r})d\tau_1\left(\overrightarrow{r'}\right)d\tau_2\left(\overrightarrow{r'}\right)}{\left|\overrightarrow{r'}-\vec{r}\right|^2}\vec{u}(\vec{r})$$

Dans la plupart des cas, ces doubles intégrations sont difficiles voire impossibles à calculer analytiquement. Pour contourner cette difficulté, d'autres techniques ont été développées. Ces techniques ont au préalable nécessité l'introduction de nouveaux concepts comme celui du champ électrostatique.

- **Le champ électrostatique dans le vide**
  - **Définition**

Si une particule de charge q, immobile en un point M de l'espace, est soumise à une force $\vec{F}$ autre que son poids et nulle si q est nulle, alors il existe en M un champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ tel que :

$$\vec{F} = \mathrm{q}\vec{E}$$

$\vec{F}$: force en newton

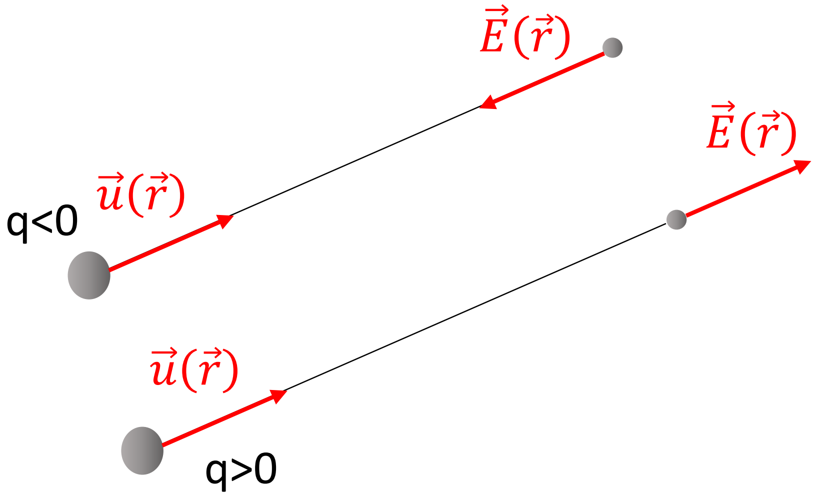
q : charge en coulomb

$\vec{E}$: champ en $N.C^{-1}$ ou $V.\ m^{-1}$

- **Champ électrostatique créé par une charge électrique**

Le champ électrostatique créé au point $\vec{r}$ par une charge q fixe, située au point $\overrightarrow{r'}$, a pour expression :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|^2}\vec{u}(\vec{r})$$



le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle est :

- Radial
- Isotrope (toutes les directions sont équivalentes)
- Indépendant du temps puisque les charges sont statiques.
- Le champ est orienté vers la charge lorsqu‘elle est négative et en sens inverse lorsqu’elle est positive.

- **Champ électrostatique créé par une distribution discrète**

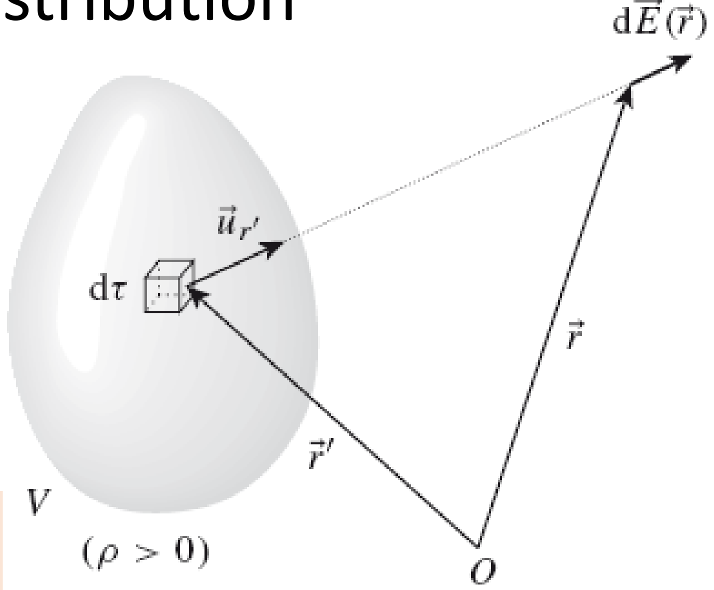
Le champ électrostatique créé par une distribution discrète statique $(q_i, \overrightarrow{r_i})$ peut être calculé en suivant la même démarche :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q\overrightarrow{u_i}(\vec{r})}{|\vec{r} - \overrightarrow{r_i}|^2}$$

Nous constatons sur cette expression que le principe de superposition s'applique également au champ électrique : le champ électrostatique total créé au point $\vec{r}$ par une distribution discrète de charges est égal à la somme des champs électriques créés par chacune des charges q_i au point $\vec{r}$.

- **Champ électrostatique créé par une distribution continue**

En généralisant la formule précédente, on obtient facilement les expressions du champ électrostatique créé par une distribution continue de charges statiques



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_v \frac{\rho(\overrightarrow{r'})d\tau(\overrightarrow{r'})}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|^2}\vec{u}(\overrightarrow{r'})$$

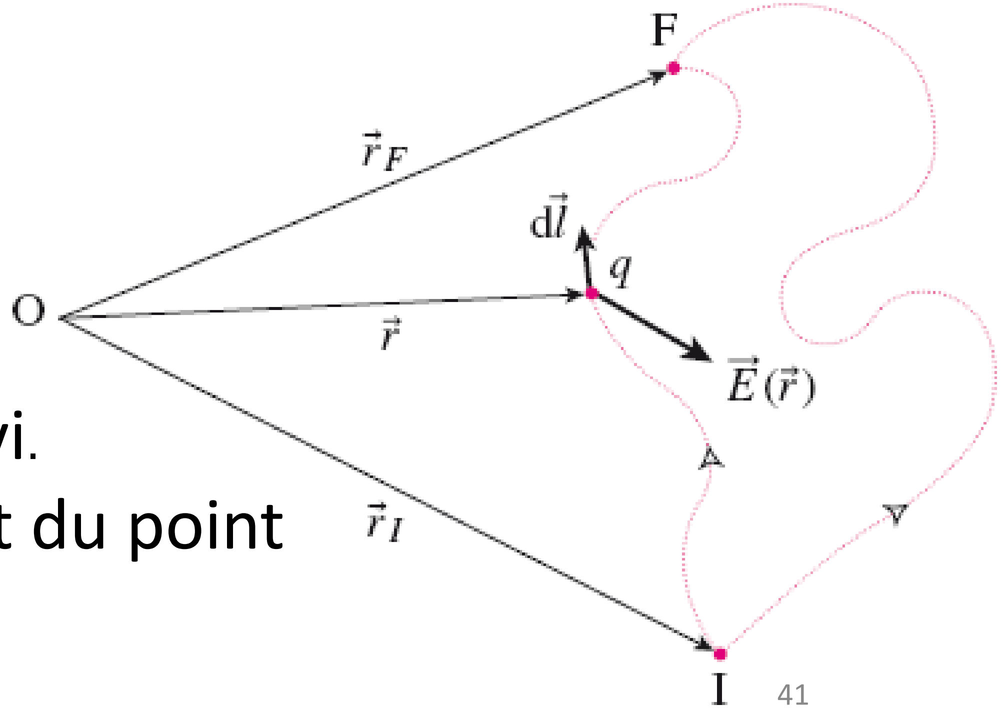
- On peut en principe calculer en utilisant ces expressions le champ électrostatique créé par n'importe quelle distribution connue de charges.
- Les expressions du champ électrostatique que nous venons de donner ne sont valables que dans le cas de distributions de charges fixes

- **Le potentiel électrostatique dans le vide**

Supposons une charge q placée dans le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une distribution de charges quelconque.

- Pour déplacer infiniment lentement d'une position initiale I à une position finale F, Le travail de la force W à exercer devra être exactement opposé à celui de la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$ à laquelle est soumise la charge q

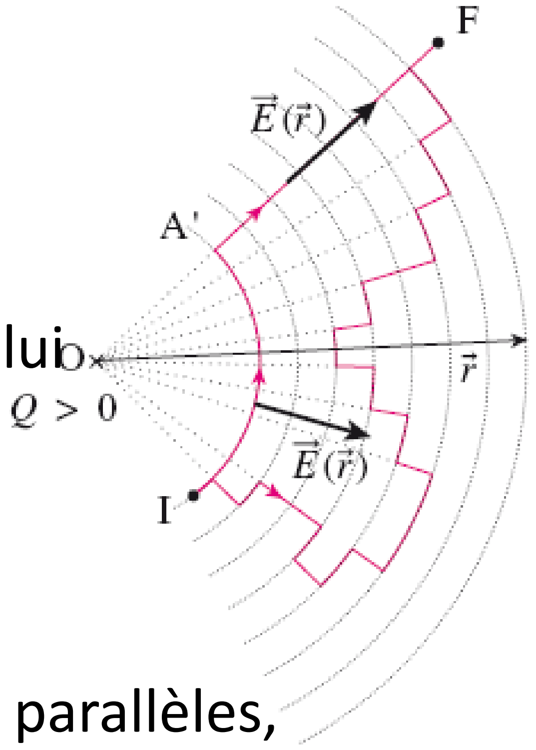
$$W = -q \int_{I}^{F} \vec{E}(r) d\vec{l}$$



- Ce travail est indépendant du trajet suivi.
- Il ne dépend que du point de départ I et du point d'arrivée F.

- **Démonstration**

Soit une charge Q placée à l'origine. Cette charge crée en tout point de l'espace un champ électrique $\vec{E}(r)$ radial



- Pour déplacer une charge q de I à F dans ce champ électrique, on peut lui faire emprunter une infinité de trajets
  - le trajet IA'F peut être diviser en deux partie: IA' et A'F
  - Le travail sur l'arc (IA') est nul puisque $\vec{E}(r)$ et $d\vec{l}$ sont orthogonaux
  - Sur la portion A'F, le champ $\vec{E}(r)$ et le vecteur déplacement $d\vec{l}$ sont parallèles, le travail n'est donc pas nul a priori sur cette portion. Le travail total a pour expression :

$$W = -q\int_{I}^{F} \vec{E}(r)d\vec{l} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{A'}^{F}\frac{Qdr}{r^2} = \frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_{A'}} - \frac{1}{r_F}\right]$$

  - On peut aisément démontrer que le travail sur le deuxième trajet est strictement identique au trajet IA'F

Le travail à échanger avec la charge q est donc indépendant du chemin suivi.

- Ce résultat suggère que nous puissions caractériser chaque point $\vec{r}$ de l'espace par une grandeur scalaire $V(\vec{r})$ appelée « potentiel électrostatique », le travail à échanger avec la charge *q* pour la déplacer de I à F étant égal par convention à la variation de cette grandeur entre I et F :

$$W_{IF} = q\big(V(F) - V(I)\big)$$

- L'expression du potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle est donnée par :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + K$$

- Pour fixer cette constante, il suffit de se donner, de façon arbitraire, la valeur du potentiel en un point.

- **Potentiel électrostatique créé par une distribution ponctuelle de charges**
  - Le potentiel créé par une distribution de charges est donc la somme algébrique des potentiels associés à chaque charge de la distribution et a pour expression :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|} + K$$

- Si toutes les charges q_i sont situées à distance finie, nous pouvons encore choisir le potentiel nul à l'infini. La constante K est alors égale à 0.

- **Potentiel électrostatique créé par une distribution continue de charges**
  - le potentiel électrostatique créé par une distribution volumique continue de charges s'obtient par intégration, sur tout le volume chargé, du potentiel élémentaire créé par la contribution élémentaire de charge ρ($\overrightarrow{r'}$) dτ centrée au point $\overrightarrow{r'}$ (ou σds ou λdl) :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_v \frac{\rho\left(\overrightarrow{r'}\right) d\tau}{\left|\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right|} + K$$

- **Relation entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique**

Supposons que nous voulions déplacer infinitésimalement une charge q placée dans un champ électrostatique $\vec{E}$ de la position $\vec{r}$ à la position voisine $\vec{r}$**+**d$\vec{r}$. Par définition, l'énergie à échanger avec la charge q est égale à :

$$\mathrm{dW} = -\mathrm{q}\vec{E}(\vec{r})d\vec{r} = q\big(V(\vec{r}+d\vec{r}) - V(\vec{r})\big)$$

- Plaçons-nous en coordonnées cartésiennes et supposons que le déplacement infinitésimal s'effectue uniquement selon l'axe Ox.

$$\mathrm{dW} = -\mathrm{q}\overrightarrow{E_x}(\vec{r})d\vec{r} = q\big(V(\mathrm{x}+dx) - V(x)\big) = \mathrm{q}\,\frac{\partial V}{\partial x}dx$$

- Par identification, nous pouvons réécrire les composantes du champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r})$en fonction des variations locales du potentiel $V(\vec{r})$:

$$\overrightarrow{\mathrm{E}_\mathrm{x}}(\vec{\mathrm{r}}) = -\frac{\partial \mathrm{V}(\vec{\mathrm{r}})}{\partial \mathrm{x}} \quad \vec{\mathrm{E}}_\mathrm{y}(\vec{\mathrm{r}}) = -\frac{\partial \mathrm{V}(\vec{\mathrm{r}})}{\partial \mathrm{y}} \quad \vec{\mathrm{E}}_\mathrm{z}(\vec{\mathrm{r}}) = -\frac{\partial \mathrm{V}(\vec{\mathrm{r}})}{\partial \mathrm{z}}$$

- On dit que le champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r})$dérive du potentiel V($\vec{r}$). Si nous introduisons l'opérateur $\vec{\nabla}$correspondant aux coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}}) = -\vec{\nabla}\mathrm{V}(\vec{\mathrm{r}})$$

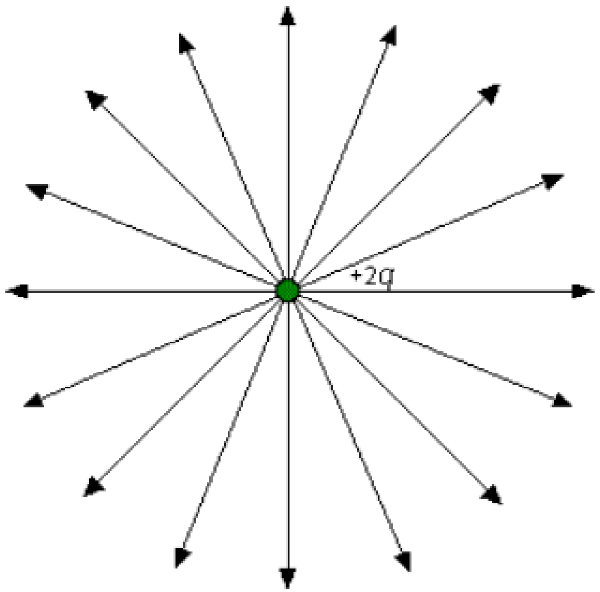
- $\vec{\nabla}$Vse lisant « gradient de V ». Ce résultat se généralise aisément à tous les systèmes de coordonnées, à condition bien entendu d'employer les expressions correspondantes de l'opérateur $\vec{\nabla}$ qui sont données par :

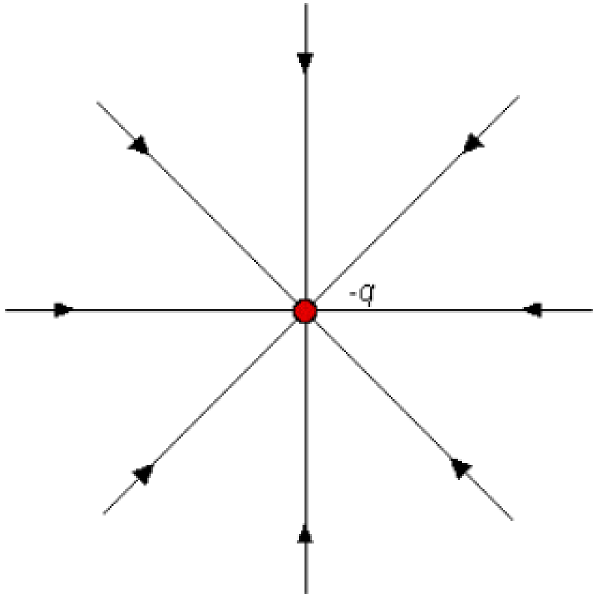
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\vec{\mathrm{x}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\vec{\mathrm{y}}+\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\vec{\mathrm{z}}$$

- Notons que ce résultat montre que le potentiel doit être une fonction continue dans tout l'espace. En effet, une discontinuité du potentiel entraînerait une valeur infinie du champ électrostatique au niveau de cette discontinuité.

- **Lignes de champ**
  - La présence de charges sources dans une région de l’espace modifie les propriétés électriques de celle-ci en créant, en chaque point M, un champ électrique. On introduit alors le concept de lignes de champ.
  - Le tracé des lignes de champ permet d'établir l'allure générale du champ électrique dans une région donnée de l'espace.
  - La ligne de champ représente l'orientation du champ électrique résultant en un point de l'espace.
  - En tout point, le champ électrique résultant est tangent à la ligne de champ passant par ce point.

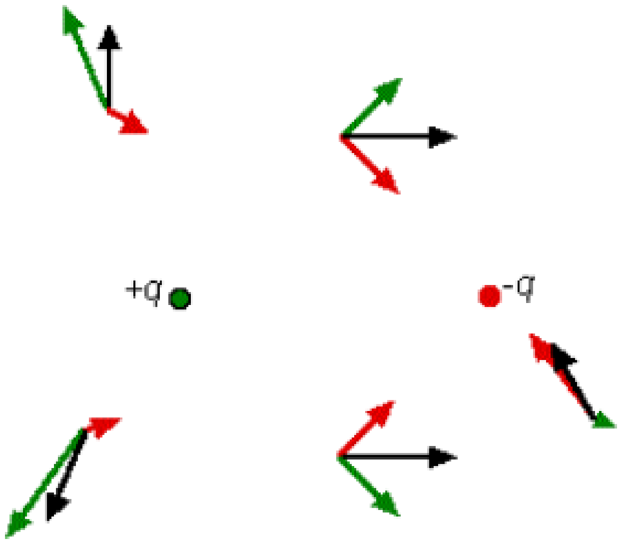
- Pour tracer convenablement les lignes de champ, certaines règles s'appliquent.
  1. Les lignes de champ sont continues entre les charges positives et négatives. Les lignes de champ sont produites par les charges positives et absorbées par les charges négatives.
  2. Le nombre de lignes de champ produites ou absorbées par une charge est proportionnel à la grandeur de la charge (une charge $+2q$ produit deux fois plus de lignes qu'en absorbe une charge $-q$).



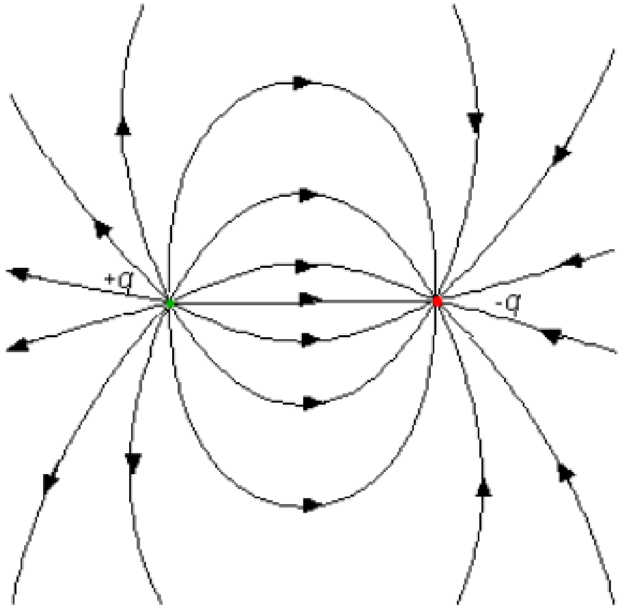


3. Les lignes de champ doivent respecter la symétrie de la distribution des charges.
4. Les lignes de champ ne doivent pas se croiser.
5. En s'éloignant de la distribution de charges, les lignes de champ semblent provenir d'une charge ponctuelle de valeur égale à la charge nette de la distribution.

- Exemple: dipôle électrique



Avant de tracer les lignes de champ, on détermine d'abord l'orientation du champ électrique résultant en quelques points de l'espace.

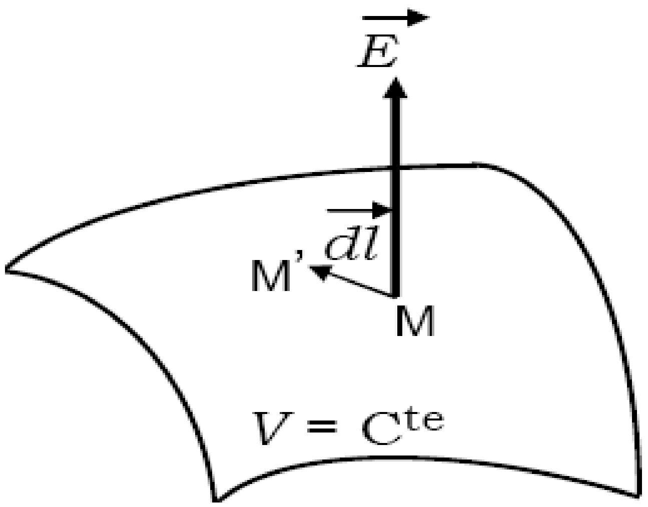


- **Surfaces équipotentielles**
  - **Définition**

    Les surfaces équipotentielles sont constituées par l'ensemble des points correspondant à la même valeur du potentiel.
  - Les surfaces équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ.

    En effet, en considérant un très petit déplacement $\overrightarrow{MM'} = d\vec{l}$ sur une surface équipotentielle on trouve :

$$\mathrm{dV} = -\vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{l}} = 0$$



Par conséquent $\vec{\mathrm{E}}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{MM'}$'

- Le potentiel décroit le long d'une ligne de champ.

En effet, un déplacement infiniment petit $\overrightarrow{MM'} = d\vec{l}$, dans le sens de $\vec{E}$ sur la ligne de champ, entraîne :

$$\mathrm{dV} = -\vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{l}} = -\left|\vec{\mathrm{E}}\right|\left|\overrightarrow{MM'}\right| < 0$$

$$\Rightarrow V_{M'} < V_M$$

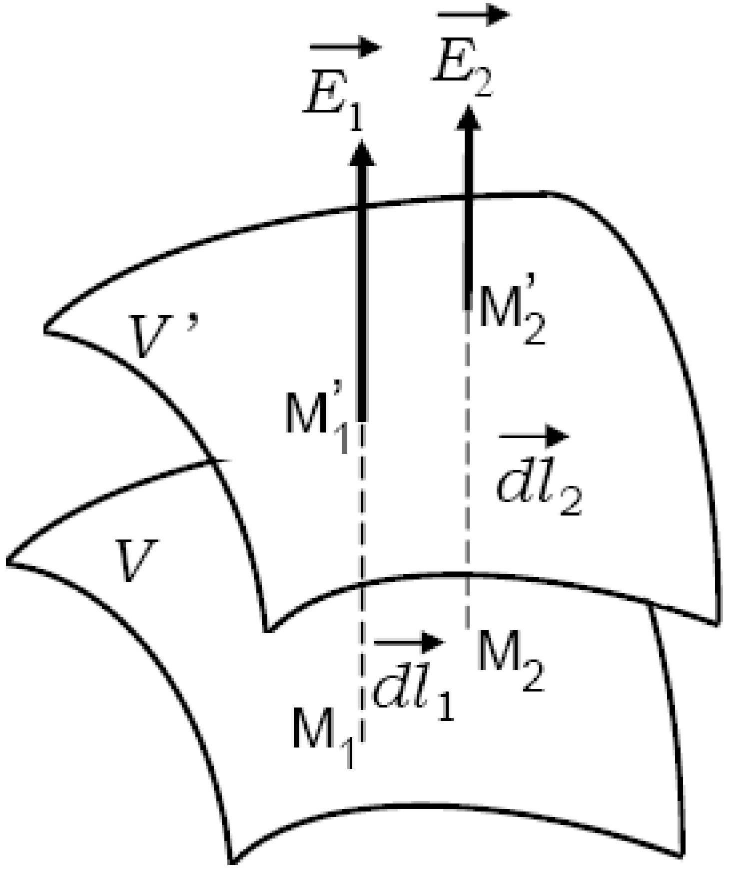
La ligne de champ est donc orientée du potentiel le plus élevé au potentiel le moins élevé.

- Le champ électrique est plus intense là où les équipotentielles sont les plus resserrées.
  - En effet, si l'on considère deux très petits déplacements

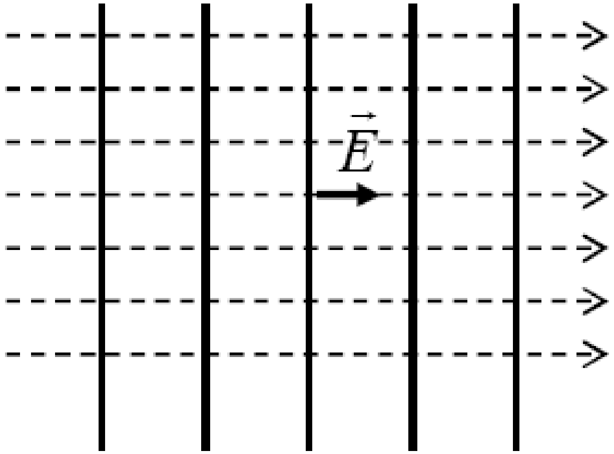
$$\overrightarrow{M_1M_1{}'} = \overrightarrow{dl_1} \quad \overrightarrow{M_2M_2{}'} = \overrightarrow{dl_2}$$

$$dV = -\left|\overrightarrow{E_1}\right|\left|\overrightarrow{dl_1}\right| \quad \text{et} \quad dV = -\left|\overrightarrow{E_2}\right|\left|\overrightarrow{dl_2}\right|$$

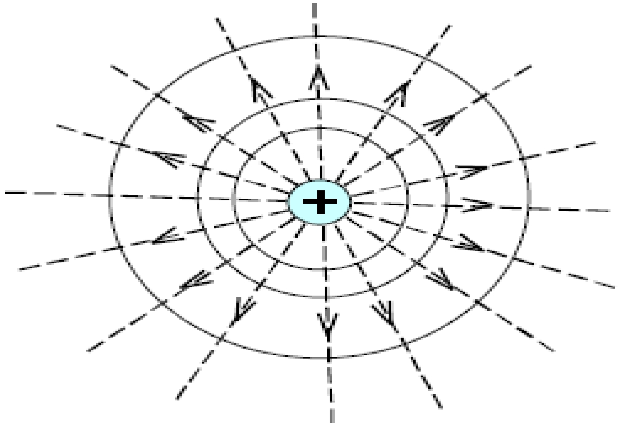
Comme $\left|\overrightarrow{dl_1}\right| < \left|\overrightarrow{dl_2}\right| \Rightarrow \left|\overrightarrow{E_2}\right| < \left|\overrightarrow{E_1}\right|$



- Dans le cas d’un champ uniforme les lignes de champ sont des droites parallèles et les surfaces équipotentielles sont des plans perpendiculaires à ces droites.



- Dans le cas d’une charge ponctuelle, les surfaces équipotentielles sont des sphères concentriques de centre O et les lignes de champ sont radiales



- **Propriétés du champ électrostatique**
- **Rappels**
  - **Circulation C**
    - S'applique à un champ scalaire *f* ou un champ vectoriel **F**
    - Donne un scalaire

$$C = \int_A^B f dl \qquad C = \int_A^B \vec{\mathrm{E}}\, d\vec{\mathrm{l}}$$

    - un circuit est fermé lorsque A=B (on ajoute un rond sur l'intégrale)

$$C = \oint_A^B \vec{\mathrm{E}}\, d\vec{\mathrm{l}}$$

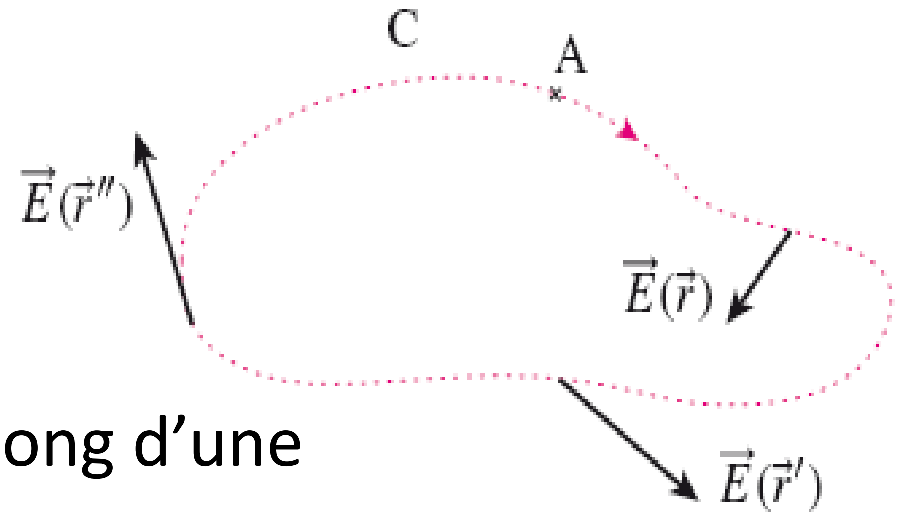
  - **Exemples :**
    - le travail W est la circulation d'une force **F** le long d'un trajet
    - la différence de potentiel U est la circulation du champ électrique **E** le long d'un trajet

- **Propriétés associées au caractère radial du champ électrostatique**
  - Circulation du champ électrostatique

    comme le champ $\vec{\mathrm{E}}$ est radial et dérive d'un potentiel V, alors la circulation du champ sur un contour C fermé est nulle.

    la circulation est donnée par :

$$\oint \vec{\mathrm{E}}\, d\vec{\mathrm{l}} = \int_A^A \vec{\mathrm{E}}\, d\vec{\mathrm{l}} = V(A) - V(A) = 0$$



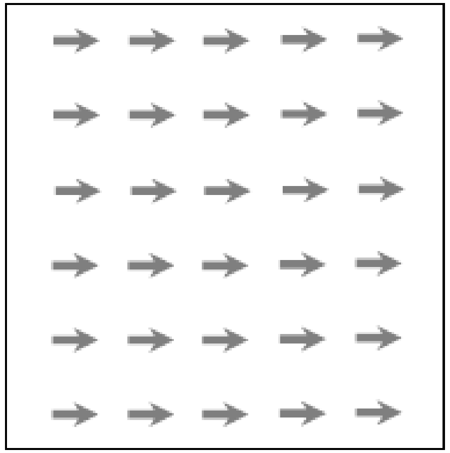
  - La valeur moyenne du champ E_{tan} le long d'une courbe fermé est nulle

- **Rotationnel**

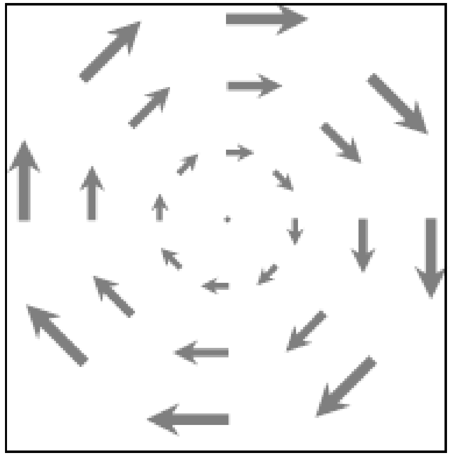
l'opérateur **rotationnel** donne une mesure de la « rotation » du champ. La direction d'un vecteur de ce champ donne l'axe de rotation, son intensité la vitesse de rotation autour de cet axe. ... Un champ vectoriel de **rotationnel** nul est dit « irrotationnel ».

  - S'applique à un champ de vecteurs
  - Donne un champ de vecteurs

$$\overrightarrow{rot}\vec{\mathrm{F}} = \vec{\nabla}\Lambda\vec{\mathrm{F}} \qquad avec\ \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\vec{\mathrm{x}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\vec{\mathrm{y}}+\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\vec{\mathrm{z}}$$



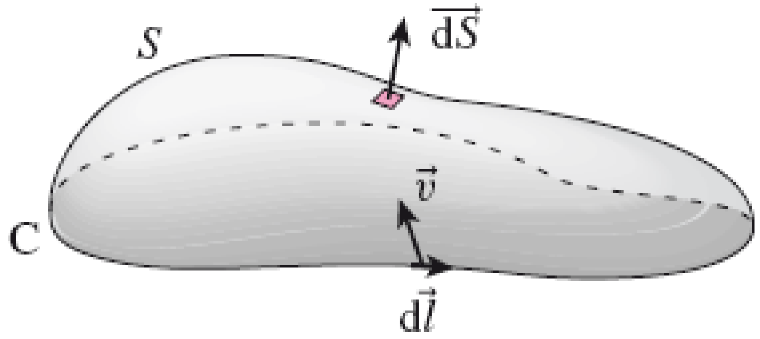
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{F}}=\vec{0}$



$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{F}}\neq\vec{0}$

- **Rotationnel du champ électrostatique**
  - Théorème de Stockes
    - Selon le Théorème de Stockes, la circulation totale de tout vecteur $\vec{A}$ sur le contour *C* entourant la surface *S* est telle que :

$$\oint \vec{\mathrm{A}}\, d\vec{\mathrm{l}} = \iint_{s} \left(\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathrm{A}}\right) d\vec{s}$$



$$\Longrightarrow \quad \oint \vec{\mathrm{E}}\, d\vec{\mathrm{l}} = \oiint_{S} \left(\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathrm{E}}\right) d\vec{s}$$

- $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \overrightarrow{rot}\vec{E}$ appelé rotationnel du vecteur $\vec{E}$
- $d\vec{s}$ est un vecteur normal à un élément infinitésimal de surface, de module ds et orienté de manière à ce que le trièdre ($d\vec{\mathrm{l}}$, $\vec{v}$, $d\vec{s}$) soit direct, $\vec{v}$ étant un vecteur quelconque orienté vers le centre de la boucle.

Nous dirons que le rotationnel du champ électrostatique $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est nul.

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{\mathrm{E}} = \vec{0}$$

- Ce résultat constitue l'expression d'une propriété locale fondamentale du champ électrostatique. Elle relie les valeurs du champ $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ en un point à celles qu'il prend dans un voisinage immédiat.

- **Propriétés associées à la dépendance en 1/*r* 2 du champ $\overrightarrow{\mathbf{E}}$**
  - **Flux d'un champ électrostatique à travers une surface fermée**
    - **Définition**
      - Le flux d'un champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ à travers un élément de surface ds est donné par l'expression:

$$\mathrm{d}\Phi = \overrightarrow{\mathrm{A}}.\,\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{s}}$$

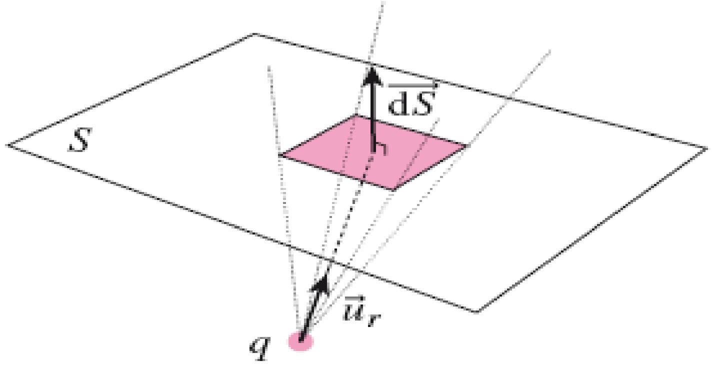
      - Le flux du champ $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ à travers une surface finie *s* est tout naturellement donné par l'intégrale double étendue à toute la surface *s* de l'élément infinitésimal précédent.
      - Le flux mesure en quelque sorte « l'écoulement » du champ à travers la surface.

- **Flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle**

On considère une surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{s} = \vec{\mathrm{n}}\,\mathrm{ds}$ orientée par sa normale $\vec{\mathrm{n}}$. Le flux élémentaire du champ électrostatique à travers la surface élémentaire ds est :

$$d\Phi = \vec{\mathrm{E}}\,d\vec{s}$$

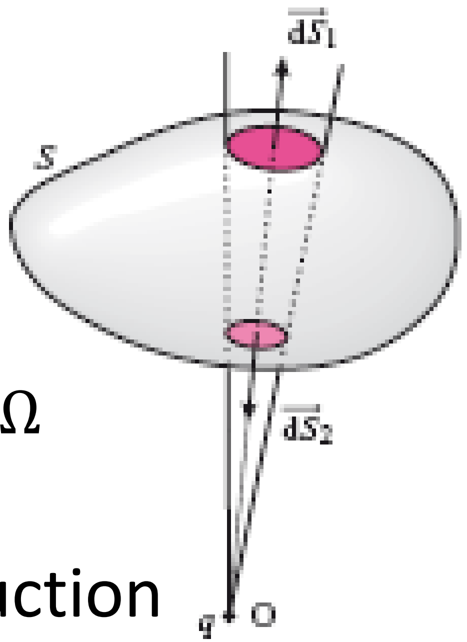
$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\overrightarrow{u_r}d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$



Où $d\Omega$ est l'angle solide sous lequel on voit l'élément de surface ds depuis la charge.

- Lorsque les lignes de champ sont perpendiculaires à la surface ds, le flux est maximum, tandis qu'il est nul si la surface est parallèle aux lignes de champ.

- **Flux à travers une surface fermée ne contenant pas la charge ponctuelle** q **créant le champ électrostatique**
  - Le cône engendré par le faisceau de ligne de champ intersecte la surface S en deux endroit et définit $\overrightarrow{ds_1}$ et $\overrightarrow{ds_2}$
  - Conventionnellement les surfaces sont orientées de l'intérieur vers l'extérieur de la surface fermée S.



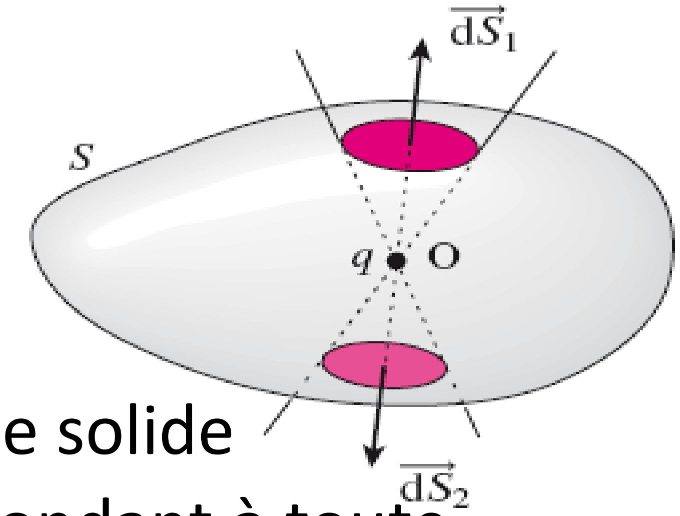
$$d\phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{ds_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega \qquad d\phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{ds_2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

- Le flux total traversant cette surface *S* est alors égal par construction à la somme des contributions associées à chacun des tubes intervenant dans la décomposition de *S*

- Le flux total du champ électrostatique créé par une charge, à travers une surface fermée ne la contenant pas, est nul.

- **Flux à travers une surface fermée contenant la charge ponctuelle** q **créant le champ électrostatique**
  - Le flux est simplement égal à celui du champ à travers la surface ds qui a pour expression

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$



  - Le flux total à travers la surface S est la somme des contributions apportées par chaque élément d'angle solide $d\Omega$, quelle que soit sa forme ; l'angle solide correspondant à toute la surface s est égal à 4π.
  - le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle à travers une surface fermée la contenant est exactement égal à :

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

- **Théorème de Gauss**
  - Le flux total du champ électrostatique créé par la distribution continue à travers une surface fermée est égal au produit par $1/\varepsilon_0$ de la somme algébrique Q_{int}, des charges contenues dans la surface. Nous pouvons écrire :

$$\oiint_S \overrightarrow{\mathrm{E}}\, d\overrightarrow{\mathrm{s}} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- **Expression locale du théorème de Gauss**
  - Pour établir cette nouvelle formulation du théorème de Gauss, nous appliquerons théorème de Green-Ostrogradsky à l’expression générale du théorème de Gauss **:**

$$\oiint_S \vec{\mathrm{E}}\, d\vec{s} = \iiint_V \left(\vec{\nabla}.\vec{\mathrm{E}}\right) d\tau = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- Dans cette expression *V* est le volume contenu dans la surface fermée s et $d\tau$ un élément infinitésimal de ce volume.
- Nous obtenons par identification :

$$\oiint_S \vec{\mathrm{E}}\, d\vec{s} = \iiint_V \left(\vec{\nabla}.\vec{\mathrm{E}}\right) d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho d\tau$$

- On peut donc en déduire la relation :

$$\vec{\nabla}.\overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

- Ce résultat correspond à la formulation locale du théorème de Gauss. En chaque point de l'espace, la divergence $\mathrm{div}\overrightarrow{\mathrm{E}} = \vec{\nabla}.\overrightarrow{\mathrm{E}}$ du champ électrostatique ne dépend que de la densité de charge en ce même point.

- **Équations de Poisson et de Laplace**
  - A partir des équations locales du potentiel :

$$\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}}) = -\vec{\nabla}\mathrm{V}(\vec{\mathrm{r}}) \qquad \vec{\nabla}.\overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

  - En éliminant le champ électrostatique $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ on obtient une nouvelle relation, dite « équation de Poisson »:

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\mathrm{V}(\vec{\mathrm{r}}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

  - L'expression $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\mathrm{V}(\vec{\mathrm{r}})$porte le nom de « laplacien de *V* » et se représente symboliquement par ΔV ou par $\nabla^2 V$. En coordonnées cartésiennes par exemple, cette équation s'écrira :

$$\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial\mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial\mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial\mathrm{z}^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Elle montre que les variations spatiales du potentiel au voisinage d’un point, exprimées par son laplacien, ne dépendent que de la densité de charges en ce point.
- Dans les régions de l’espace présentant une densité de charges nulle, l’équation de Poisson se réduit à :

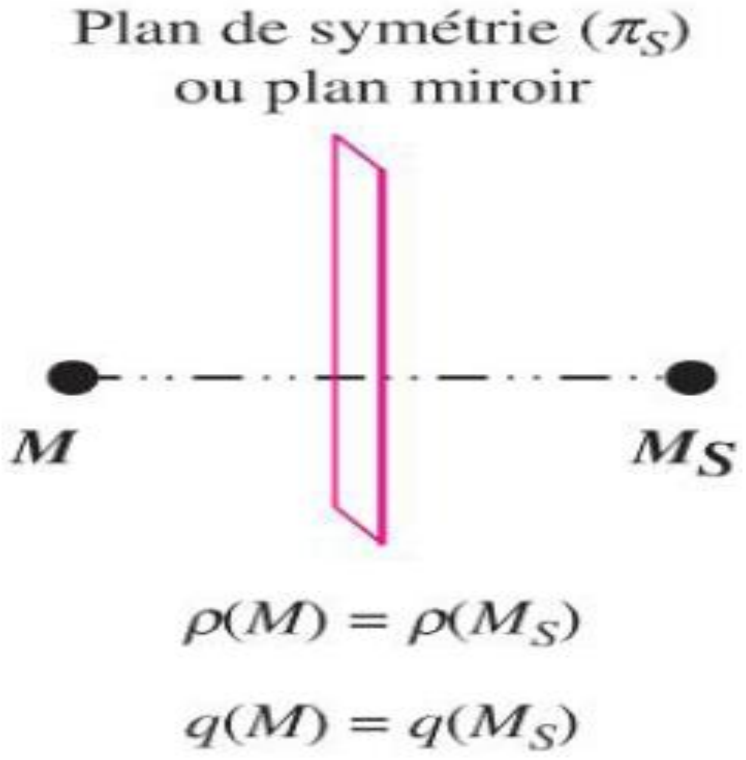
$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\mathrm{V}(\vec{\mathrm{r}}) = 0$$

Cette équation est connue sous le nom d’« équation de Laplace ».

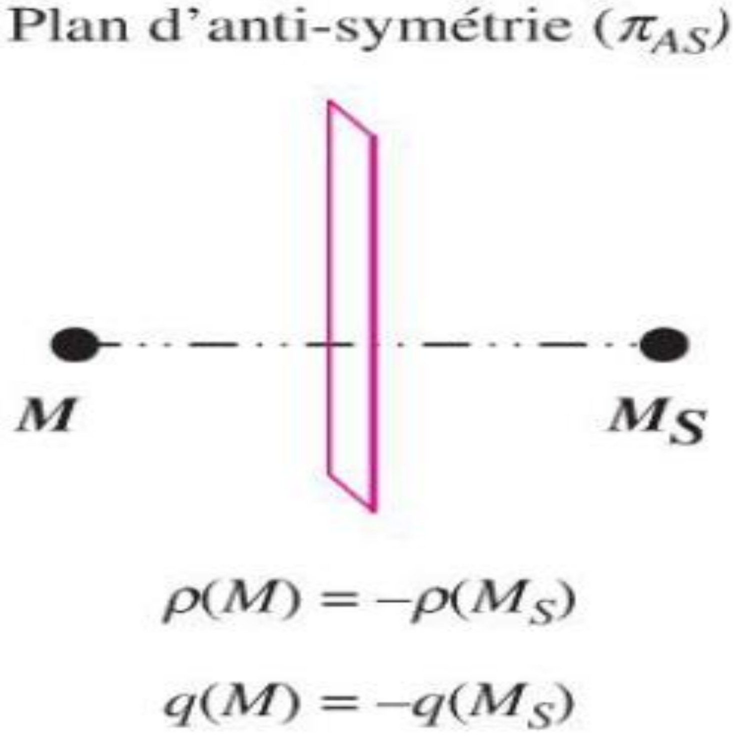
- Pour calculer le champ électrostatique créé au point P par une distribution en utilisant le théorème de Gauss, il nous faut :
    1) construire une surface fermée fictive s_G passant par P (appelée surface de Gauss) ;
    2) être capable de calculer en tout point de cette surface le produit scalaire $\overrightarrow{E}\,d\overrightarrow{s_G}$;
    3) pouvoir faire la somme de toutes ces contributions sur toute la surface s_G;
    4) en extraire la valeur particulière du champ $\overrightarrow{E}$ au point P.

- **Propriétés de symétrie**
  - Principe de Curie : « *Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.* »
  - Si l'on connaît les propriétés de symétrie d'une distribution de charges, on pourra connaître celles du champ électrostatique
  - Ces propriétés sont fondamentales car elles permettent de simplifier considérablement le calcul du champ électrostatique.

- **Plan de symétrie d’une distribution**
  - Si la charge q(M) (ou la densité de charge ρ(M)) située en M est égale à la charge q(M_s) (ou à la densité de charge ρ(M_s)) située en M_s alors le plan est un plan de symétrie (π_s).



- **Plan d'anti-symétrie d'une distribution**
  - Si la charge *q(M)* (ou la densité de charge *ρ(M)* située en *M* est égale à l'opposé de la charge $q(M_s)$ (ou la densité de charge $\rho(M_s)$) située en M_s alors le plan est un plan π_{As}).



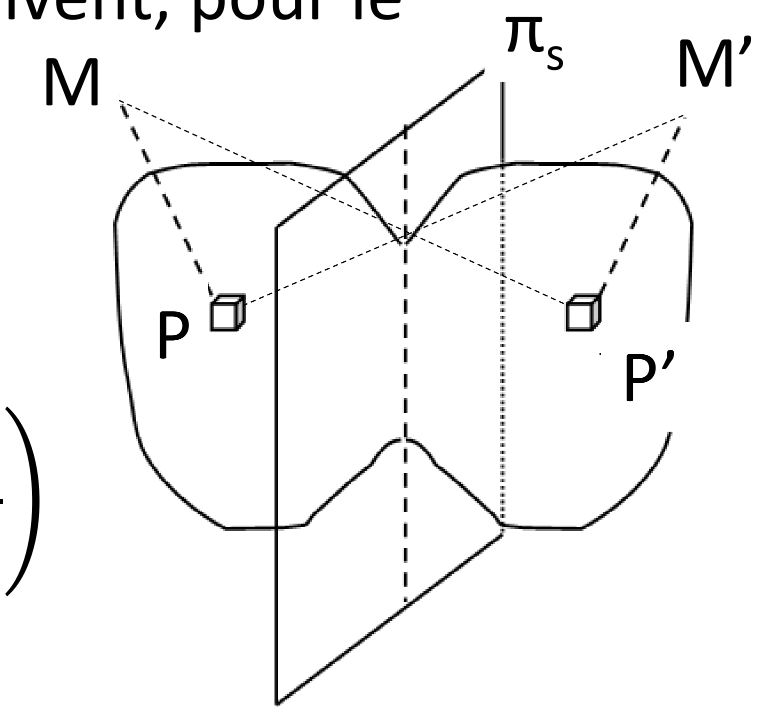
- **Invariances d'une distribution**

Une distribution est dite invariante par une transformation géométrique f si, en $M' = f(M)$ on a:

$$\mathrm{q}'(\mathrm{M}) = \mathrm{q}(\mathrm{M})$$

- **Distribution avec un plan de symétrie**

Les contributions des points *P* et *P*' en *M* et *M*' s'écrivent, pour le potentiel:



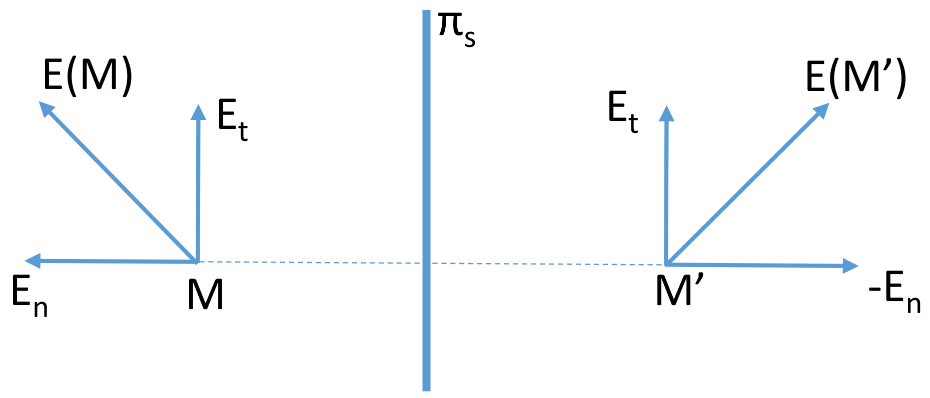
$$\begin{cases} dV(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{dq}{PM} + \dfrac{dq'}{PM'}\right) = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{PM} + \dfrac{1}{PM'}\right) \\ dV(M') = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{dq}{P'M} + \dfrac{dq'}{P'M'}\right) = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{P'M} + \dfrac{1}{P'M'}\right) \end{cases}$$

Or PM=P'M' et P'M=PM'→V(M)= V(M')

Les potentiels en deux points symétriques sont égaux

- Calcul du champ

$$\begin{cases} d\vec{E}(M) = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\overrightarrow{PM}}{\left|\overrightarrow{PM}\right|^3} + \dfrac{\overrightarrow{P'M}}{\left|\overrightarrow{P'M}\right|^3}\right) \\ d\vec{E}(M') = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\overrightarrow{PM'}}{\left|\overrightarrow{PM'}\right|^3} + \dfrac{\overrightarrow{P'M'}}{\left|\overrightarrow{P'M'}\right|^3}\right) \end{cases}$$



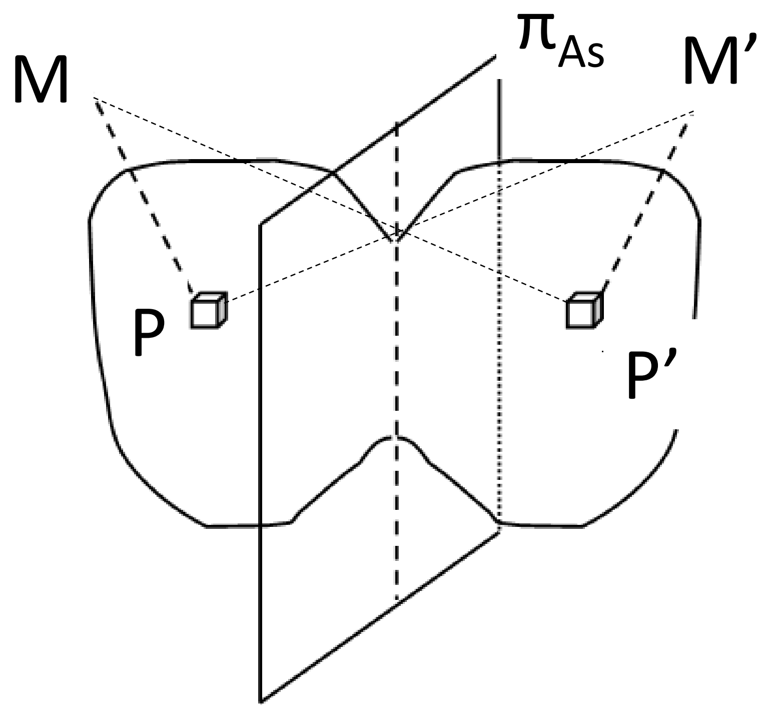
$$\vec{E}(M) = sym\left(\vec{E}(M')\right) \Rightarrow \; E_t(M) = \; E_t(M') \;\; et \;\; E_n(M) = \; -E_n(M')$$

En tout points du plan de symétrie π_s le champ est contenu dans ce plan :

$$E_n(\pi_s) = 0$$

- **Distribution avec un plan d'anti-symétrie**

$$\begin{cases} dV(M) = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{PM} - \dfrac{1}{P'M}\right) \\ dV(M') = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{PM'} - \dfrac{1}{P'M'}\right) \end{cases}$$

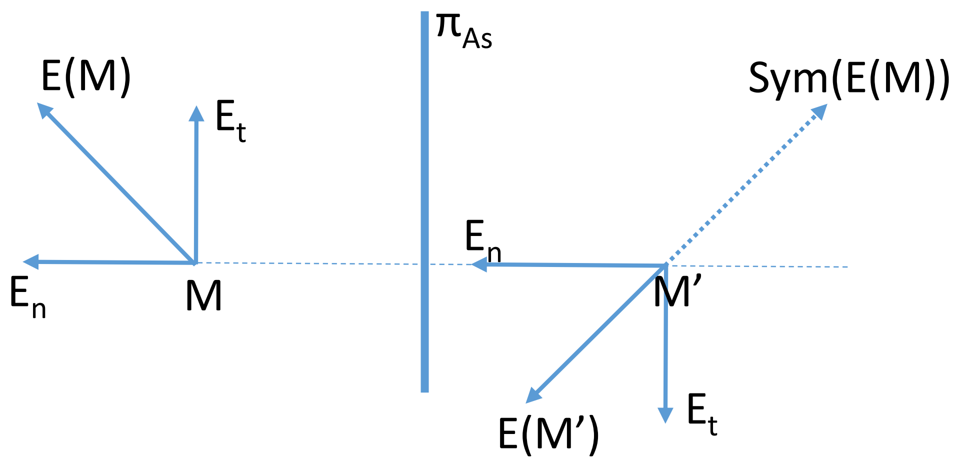


Comme PM=P'M' et P'M=PM'→V(M)= -V(M')

Les potentiels en deux points symétriques sont opposés

- Calcul du champ

$$\begin{cases} d\vec{E}(M) = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3} - \dfrac{\overrightarrow{P'M}}{\left|\overrightarrow{P'M}\right|^3}\right) \\ d\vec{E}(M') = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\overrightarrow{PM'}}{\left|\overrightarrow{PM'}\right|^3} - \dfrac{\overrightarrow{P'M'}}{\left|\overrightarrow{P'M'}\right|^3}\right) \end{cases}$$



$$\vec{E}(M) = -sym\left(\vec{E}(M')\right) \Rightarrow \; E_t(M) = -E_t(M') \;\; et \;\; E_n(M) = E_n(M')$$

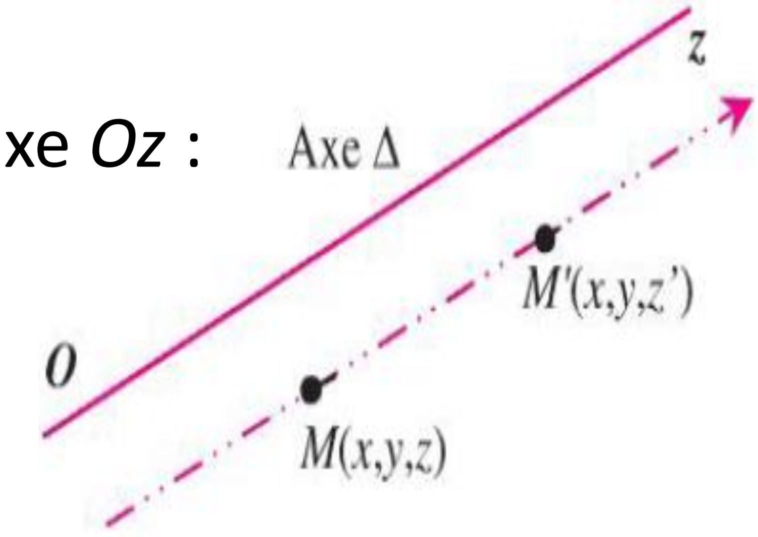
En tout points du plan d'anti-symétrie π_{As} le champ électrique est normal ce plan

- **Invariance des sources**
  - Il y a invariance par translation suivant Δ si, pour tout point M et son translaté M’, sa densité de de charge :

$$\rho(M) = \rho(M')$$

  - Exemple : Invariance par translation suivant un axe *Oz* :

$$\rho(x, y, z) = \rho(x, y, z')$$

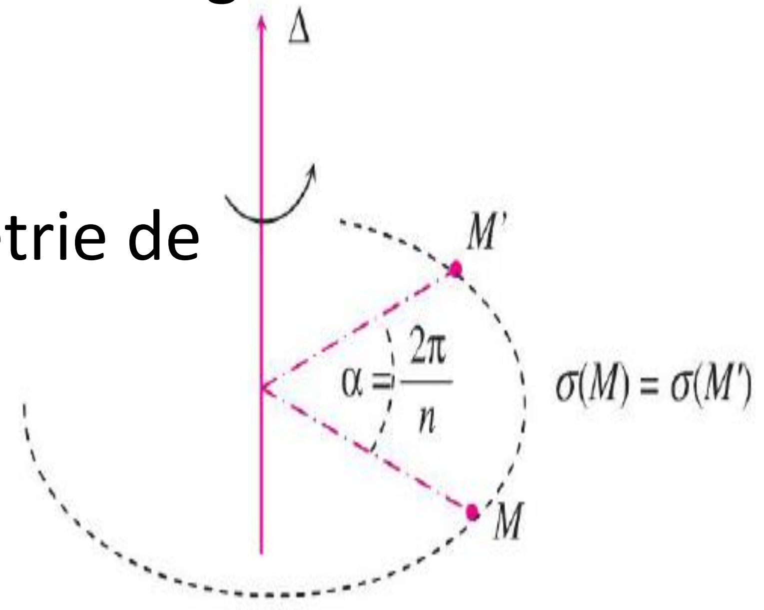


La densité ne dépend pas de la variable *z.*
Dans ces conditions, le potentiel électrostatique *V(M)* et le vecteur champ électrostatique E(M) restent inchangés par translation le long de l'axe *Oz* : ces grandeurs ne dépendent pas de la variable *z.*

- **Invariance par rotation**
  - L'opération de rotation autour d'un axe Δ d'un angle de *2π/n (n* entier) se note C_n^Δ. La densité de charges *ρ(M)* est invariante par l'opération C_n^Δ si une rotation de *2π*/ *n* autour de l'axe ~' qui amène le point *M* au point *M',* laisse la densité de charges inchangée :

$$\rho(M) = \rho(M')$$

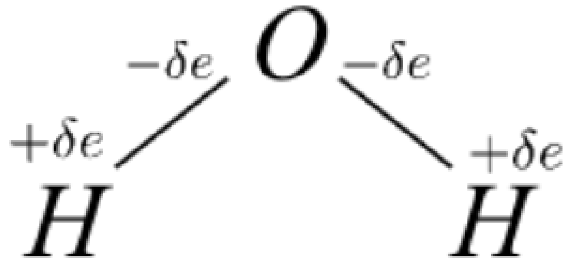
  - La distribution de charges possède alors la symétrie de révolution autour de l'axe Δ (axe de symétrie).
  - Dans ces conditions, le potentiel électrostatique *V(M)* este inchangé par rotation autour de l'axe de symétrie



- **Récapitulatif**
  - Si le point *M* appartient à :
    - un plan de symétrie des charges alors: $\vec{E}(M)$est dans le plan
    - un plan d'anti-symétrie des charges alors: $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire au plan et le potentiel est nul
    - deux plans de symétrie des charges alors $\vec{E}(M)$ est suivant la droite commune au deux plans
    - un axe de symétrie des charges alors $\vec{E}(M)$ est suivant cet axe
  - Si la répartition des charges est invariante :
    - par translation suivant une direction Oz alors champ et potentiel ne dépendent pas de la variable *z*
    - par rotation d'un angle θ autour d'un axe *Oz* alors champ et potentiel ne dépendent pas de la variable θ

Dipôle électrostatique

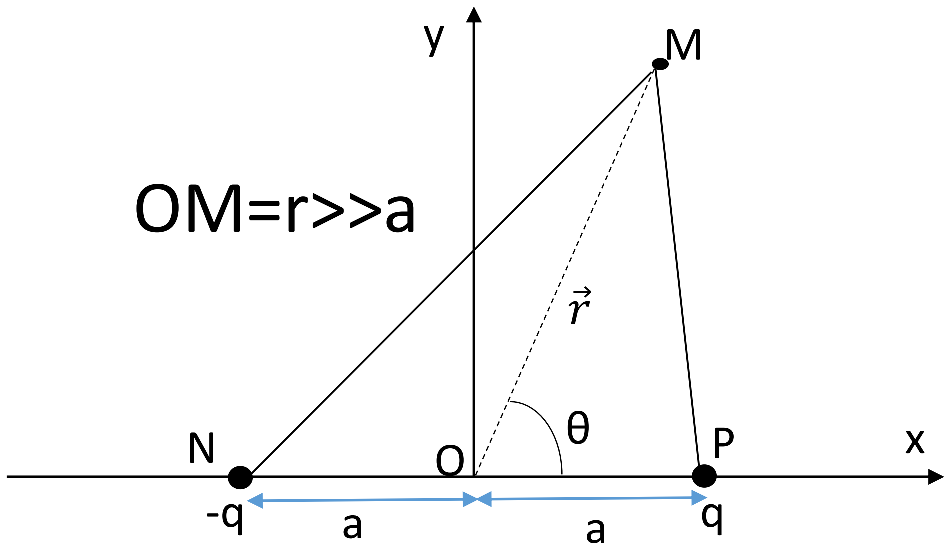
- **Introduction**
  - Les propriétés des atomes d’hydrogène et d’oxygène font que le nuage électronique de chaque liaison covalente OH est déplacé en moyenne vers l’atome d’oxygène.
  - On dit que chaque liaison OH est une liaison polarisée.
  - Cette propriété est très importante dans la nature,
    un grand nombre d’interactions sont des interactions
    entre molécules polarisées, chacune restant neutre globalement.



- **Définition**

  Un dipôle électrostatique se définit par une répartition particulière de charges électriques telles que le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec celui des charges négatives (le système est globalement neutre).

- Séparées par une distance $\left|\overrightarrow{NP}\right|$ très petite par rapport à la distance où l'on veut mesurer.



- **Potentiel électrostatique créé par un dipôle**

D'après le principe de superposition, le potentiel V(M) créé par le dipôle en un point M

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right)$$

$$\mathrm{P}M^2 = \left(-\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM}\right)^2 = OP^2 + OM^2 - 2OP.OMcos(\theta) \qquad PM^{-1} = r^{-1}\left(1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\frac{a}{r}\cos(\theta)\right)^{-1/2}$$

$$\mathrm{NM}^2 = \left(-\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM}\right)^2 = ON^2 + OM^2 - 2ON.OMcos(\boldsymbol{\pi} - \theta) \qquad NM^{-1} = r^{-1}\left(1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\frac{a}{r}\cos(\theta)\right)^{-1/2}$$

Puisque r>>a on peut faire un développement limité de PM et NM et garder que les terme de premier ordre

$$PM^{-1} \approx r^{-1}\left(1 + \frac{a}{r}\cos(\theta)\right) \qquad NM^{-1} \approx r^{-1}\left(1 - \frac{a}{r}\cos(\theta)\right)$$

$$V(M) = V_P(M) + V_N(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2a\cos(\theta)}{r^2}\right)$$

La quantité q2a est la norme du vecteur $\vec{P} = q\overrightarrow{NP}$appelé moment dipolaire électrique

V(M) peut s'écrire sous la forme :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{P}\vec{r}}{r^3}\right)$$

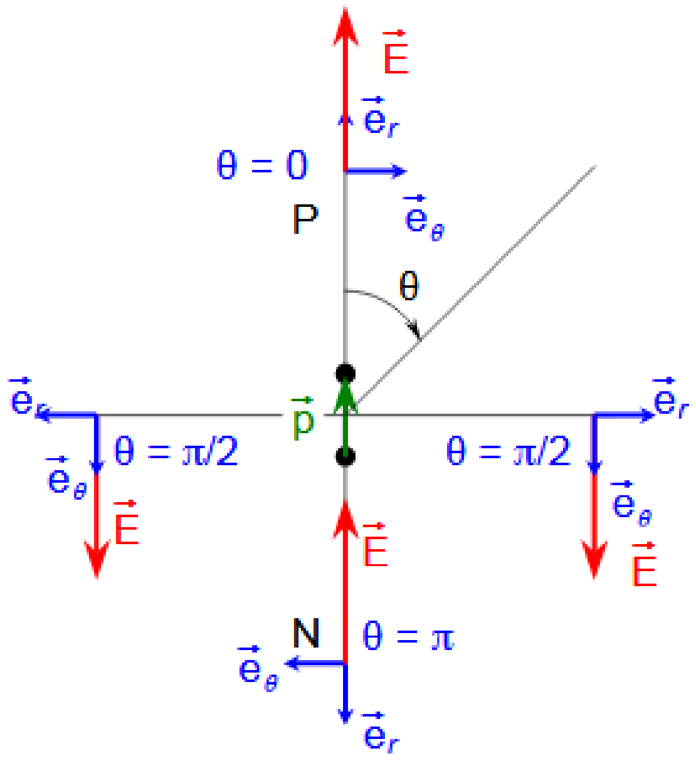
- **Champ électrostatique créé par dipôle**

comme V(M) ne dépend que de r et θ (coordonnées polaire)

→ seuls E_r et E_θ seront non nuls :

$$\vec{\mathrm{E}}(M) = -\overrightarrow{gard}\mathrm{V}(M) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta}\right)$$

$$\vec{\mathrm{E}}(M) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(\frac{2\cos(\theta)}{r^3}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\sin(\theta)}{r^3}\right)\overrightarrow{e_\theta}\right)$$



Remarque : Notons que le potentiel créé par un dipôle électrostatique est proportionnel à $1/r^2$ et le champ y dérivant est proportionnel à $1/r^3$. c'est pour cette raison que la force électrostatique est faible dans le monde microscopique

- **Lignes de champ électrostatique créé par un dipôle**
  - les lignes de champ sont tangentes champ en tout point de l'espace.
  - Un déplacement dans le plan Oxy est donné par :

$$\overrightarrow{dl} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta}$$

Comme $\vec{E} = E_r\overrightarrow{e_r} + E_\theta\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{dl}$ sont parallèle

$$\Longrightarrow \qquad \overrightarrow{dl} \wedge \vec{E} = 0$$

On trouve $$\frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\theta}d\theta$$

Après intégration $$Ln(r) = 2Ln|\sin(\theta)| + cte$$

Ou encore $$r = ksin^2(\theta)$$

- **Surfaces équipotentielles autour d'un dipôle électrostatique**

Les surfaces équipotentielles sont des surfaces sur lesquelles le potentiel électrostatique

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos(\theta)}{r^2}$$

l'équation qui donne les cordonnées des points appartenant à une surface équipotentielle est obtenue en posant

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos(\theta)}{r^2} = \mathrm{k} \qquad \text{K=constante}$$

$$\mathrm{r} = \sqrt{\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 k}}\sqrt{|\cos(\theta)|}$$

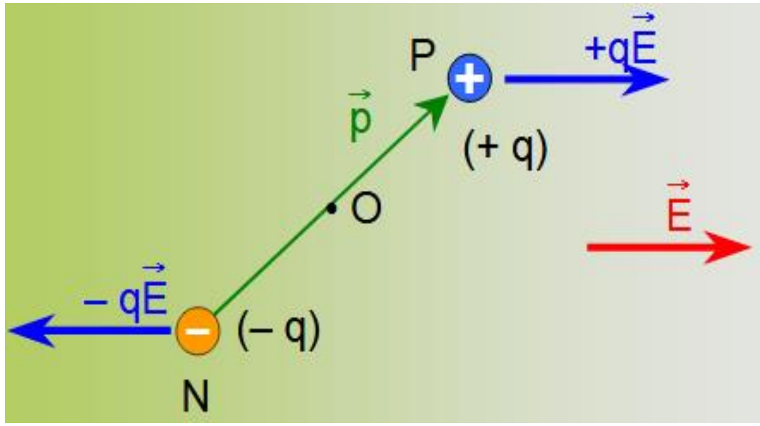
Il suffit donc de choisir une valeur de k pour définir tous les points appartenant à une surface équipotentielle.

- **Dipôle dans un champ électrique uniforme**

On considère un dipôle dans une région de l'espace où règne un champ électrique $\vec{E}$ uniforme.

- La force résultante exercée sur le dipôle est nulle.
  - Si le dipôle ne peut pas tourner, il ne se passe rien
  - Si le dipôle peut tourner, il s'aligne alors selon $\vec{E}$
- Le dipôle est soumis à un couple de forces,

  Le moment du couple est donné par la relation:



$$\vec{C} = \overrightarrow{M}_{-q\vec{E}/O} + \overrightarrow{M}_{q\vec{E}/O}$$

$$\vec{C} = \overrightarrow{ON} \wedge (-q\vec{E}) + \overrightarrow{OP} \wedge (q\vec{E})$$

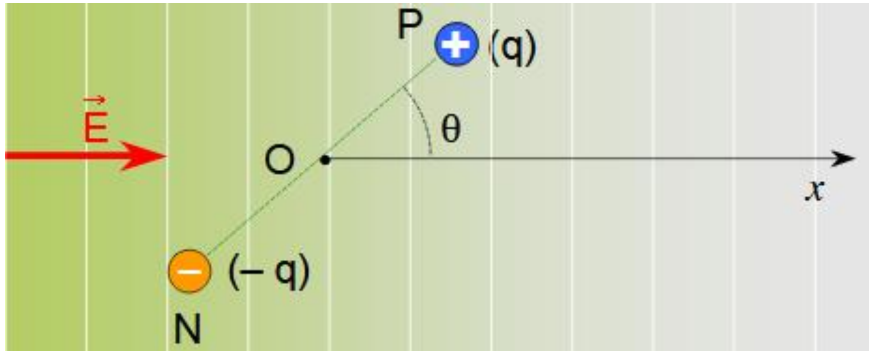
$$\vec{C} = \left(\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OP}\right) \wedge \left(q\vec{E}\right) = q\overrightarrow{NP} \wedge \vec{E} = \vec{P} \wedge \vec{E}$$

Le champ électrique influence le dipôle en le faisant tourner de telle sorte que $\vec{P}$ s'aligne avec $\vec{E}$.

- **Energie potentiel d'un dipôle électrostatique.**

Energie qu'il possède du fait de son orientation relative par rapport au champ : si on le lâche, il se tourne spontanément

- On choisit $\vec{E}$ parallèle à Ox, $\vec{P}$ fait un angle θ avec $\vec{E}$.

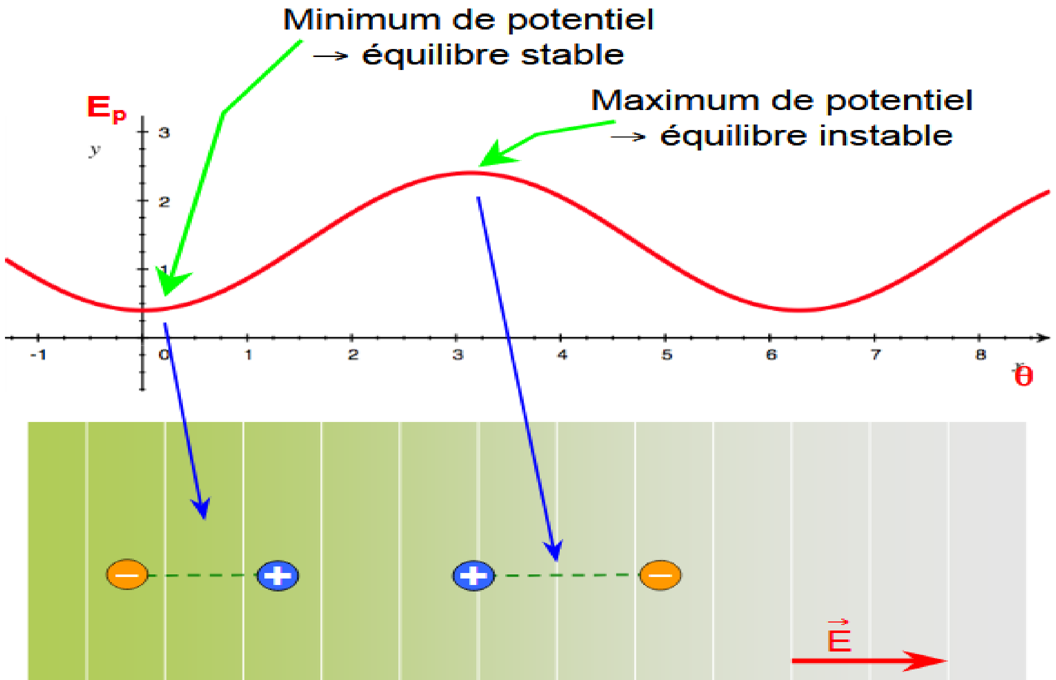


$$\mathrm{E_p} = -\mathrm{q}V(\mathrm{N}) + \mathrm{q}V(\mathrm{P})$$

D'autre part le circulation du champ entre N et P

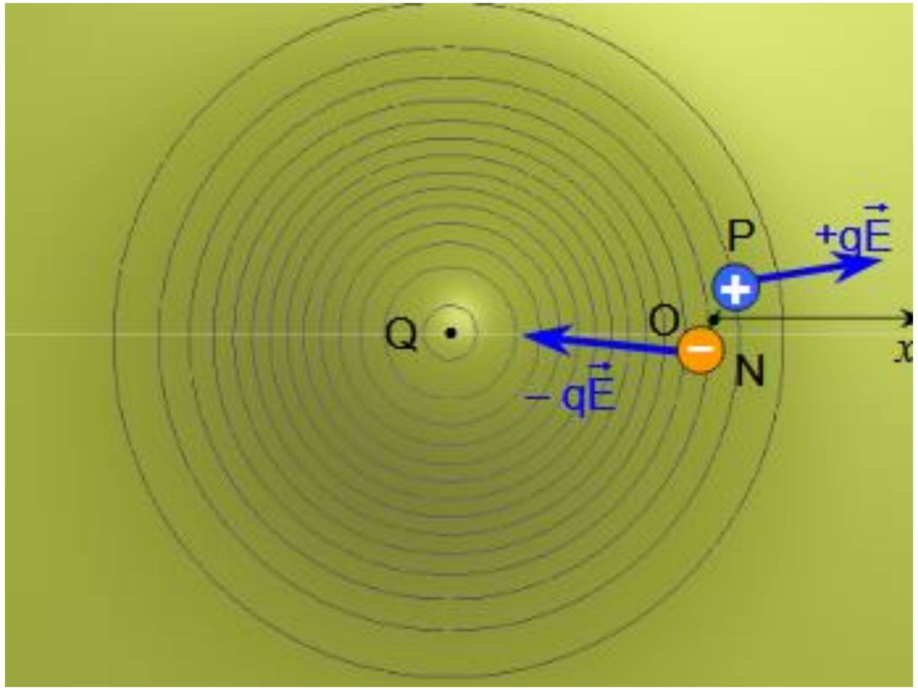
$$\int_N^P \vec{\mathrm{E}}\, d\vec{\mathrm{l}} = \vec{\mathrm{E}}\,\overrightarrow{\mathrm{NP}} = V(N) - V(P)$$

$$\mathrm{E_p} = -\mathrm{q}\vec{\mathrm{E}}\,\overrightarrow{\mathrm{NP}} = -\vec{\mathrm{P}}\,\vec{\mathrm{E}}$$



- **Cas d’un champ non uniforme**
  - Dans ce cas, les deux pôles subissent des forces qui ne sont plus égales et opposées. Il en résulte une force qui va déplacer le dipôle dans son ensemble. On aura donc un mouvement de translation de centre de masse *O* du dipôle, en plus du mouvement de rotation autour de *O*.
  - La force résultante est liée à l’énergie potentielle par :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$$
$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}(\vec{P}\vec{E})$$



Conducteurs à l'équilibre

- **Définition :**
  - Un conducteur est un matériau dans lequel les charges se déplacent lorsqu’une force électrostatique leur est appliquée, aussi petite soit-elle.
  - Nature des charges mobiles :
    - Dans les métaux, seuls les électrons sont mobiles, le réseau de charges positives étant à peu près
    - Dans les liquides et les gaz, les ions se déplacent aussi.

- Expérience
  - Si on met en contact deux matériaux conducteurs électriquement chargés (deux baguettes frottées), les charges électriques passeront d'un matériau vers un autre, modifiant ainsi le nombre de charges contenues dans chacun des matériaux jusqu'à ce qu'un équilibre électrostatique soit atteint : les charges électriques y sont statiques (immobiles).

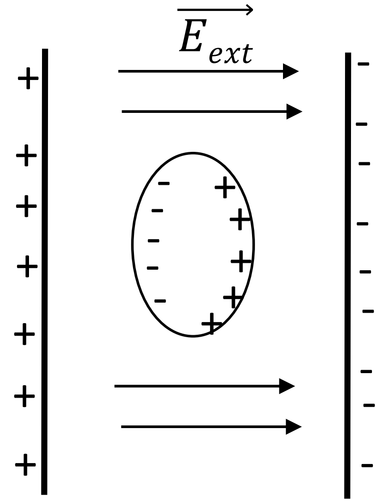
À l’équilibre électrostatique la résultante des forces mécaniques appliquées sur chacune des charges électriques dans le matériau par les autres charges est nulle.

- **Equilibre électrostatique**
  - Un conducteur est en équilibre électrostatique si il n’y a pas de déplacement de charges mobiles. La répartition des charges est constante dans le temps.
  - Conséquences
    - Puisque les charges ne bougent pas ($\vec{F}_{e^-}$= 0), le champ électrostatique est toujours nul dans un conducteur :$\vec{E}_{int}$= 0.
    - Si le champ est nul, et puisque $\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}}) = -\overrightarrow{grad}\mathrm{V}(\vec{\mathrm{r}})$ le potentiel est constant à l’intérieur du conducteur . C’est un volume équipotentiel.

- **Analogie avec la thermodynamique**

Équilibre électrostatique	$\Leftrightarrow$	Équilibre thermique
Potentiel électrostatique	$\Leftrightarrow$	Température
Charges électriques	$\Leftrightarrow$	Chaleur

- **Distribution de charges**
  - **Expérience**
    - Deux armatures plan conducteur supposées infinies, l'une chargée positivement et l'autre chargée négativement.
    - On insère un conducteur entre les deux armatures, les charges électriques sur le conducteur négatives vont subir des forces électriques dues au champ électrostatique $\vec{F} = -e\overrightarrow{E_{ext}}$

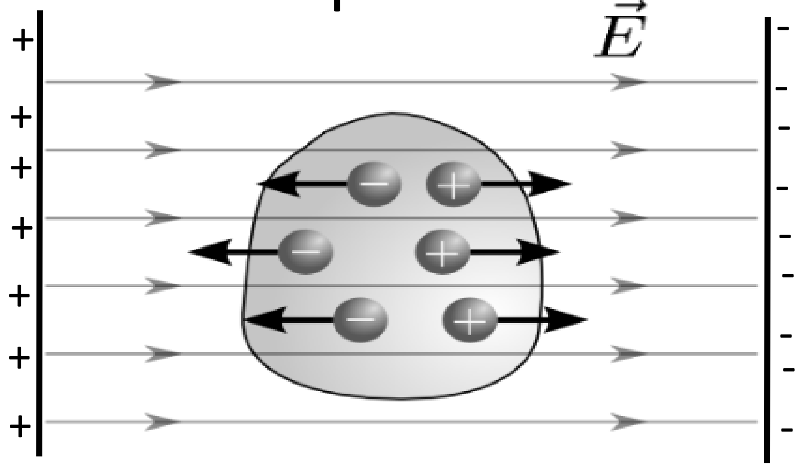


Apparition d'un champ électrostatique interne (dans le conducteur) $\overrightarrow{E_{int}}$ qui, une fois l'équilibre électrostatique atteint, annulera exactement le champ électrostatique $\overrightarrow{E_{ext}}$, telle que :

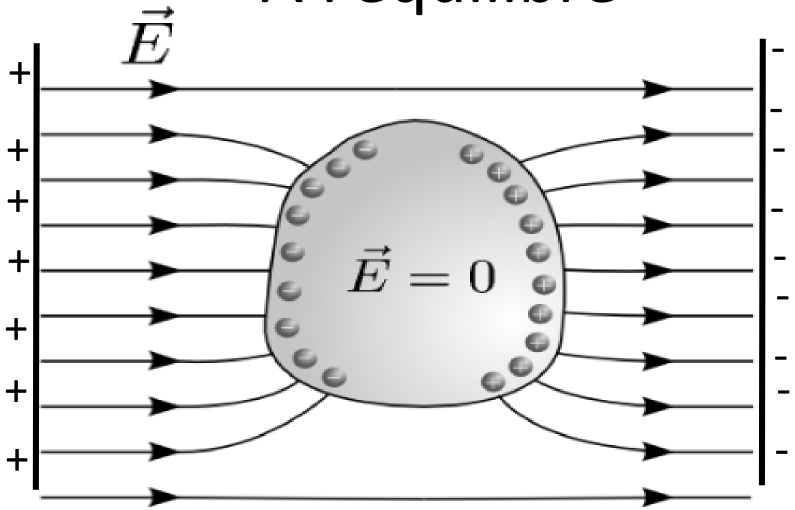
$$\overrightarrow{E_{ext}} + \overrightarrow{E_{int}} = \vec{0}$$

- **Les lignes du champ**
  - Les lignes de champ partant de l'armature positive vont atterrir sur la face chargée négativement du conducteur
  - Les lignes de champ partiront de la surface positive du conducteur et atterrissent sur l'armature chargée négativement.
  - Cela change complètement la configuration des lignes de champ entre les deux armatures chargées.

Hors équilibre



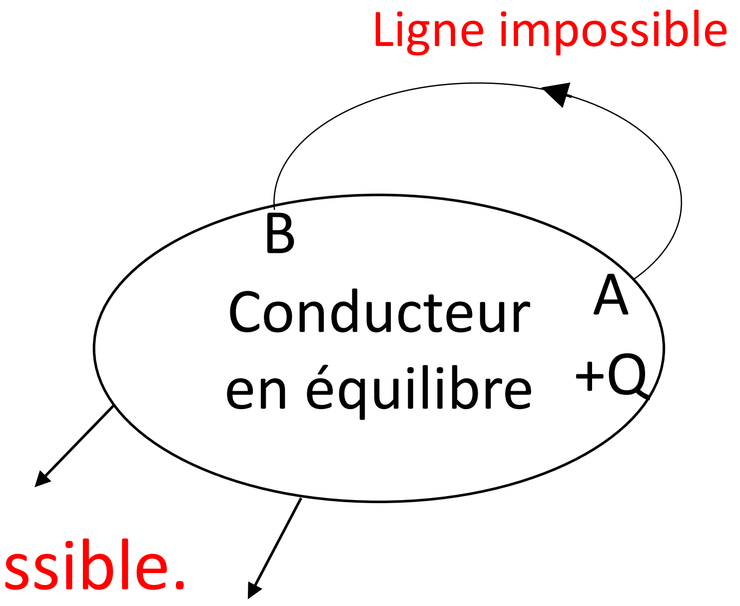
A l'équilibre



- Imaginons une ligne de champ reliant deux point A et B du conducteur. La circulation du champ électrostatique le long d'une ligne reliant deux points A et B sur la surface du conducteur est donnée :

$$\int_A^B \vec{\mathrm{E}}\, d\vec{\mathrm{l}} = V(A) - V(B) = 0$$

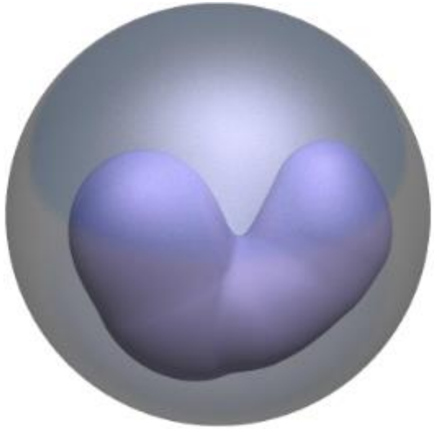
Le conducteur en équilibre est équipotentiel



Cette ligne de champ est par conséquent impossible.

- Appliquons le théorème de Gauss sous sa forme locale

$$div\vec{\mathrm{E}} = \vec{\nabla}.\vec{\mathrm{E}} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$



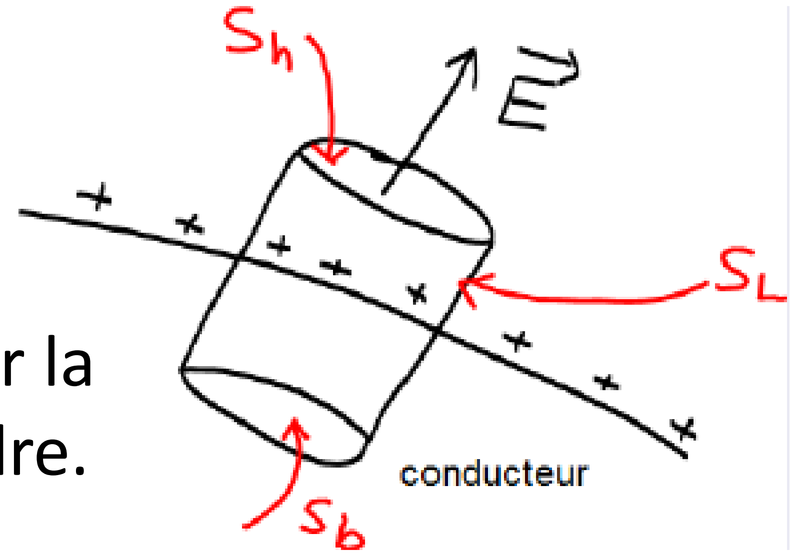
- le champ électrostatique dans un conducteur en équilibre ($\vec{\mathrm{E}}=\vec{0}$), il s'ensuit que la densité volumique des charges $\rho(\vec{r})$devrait être nulle en tout point où $\vec{\mathrm{E}}=\vec{0}$.
- Les charges excédentaires ne peuvent se répartir que sur la surface du conducteur. On a une densité surfacique de charges

Ce résultat ne signifie pas que le conducteur en équilibre ne contient pas de charges (négatives ou positives). En fait, cela signifie tout simplement que le nombre de charges positives est égal en tout point du conducteur

- Le champ électrostatique à la surface d'un conducteur en équilibre est toujours normal à cette surface.

En fait, si le champ électrostatique avait une composante tangentielle à la surface du conducteur, des charges électriques sur la même surface subiront l'effet d'une force électrique entrainant ainsi leur déplacement ; ce qui est contradictoire avec la notion d'équilibre électrostatique d'un conducteur où les charges électriques sont statiques.

- **Intensité du champ électrostatique**
  - Théorème de Gauss



$$\oiint_S \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$dQ_{int} = \sigma dS$ la charge électrique déposée sur la surface du conducteur délimitée par le cylindre.

$$\oiint_S \vec{E}\,d\vec{s} = \iint_{S_h} \vec{E}\,ds\vec{n} = E_n ds = \frac{\sigma ds}{\varepsilon_0}$$

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$ où E_n est la composante normale du champ électrostatique

- **Capacité d'un conducteur isolé**

Soit un conducteur portant une charge *Q* et dont le potentiel est *V* :

$$Q = \int \sigma ds \qquad\qquad V = \int \frac{\sigma ds}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Supposons qu'au lieu de σ, la densité de charges soit $\sigma' = a\sigma$. Alors la charge et le potentiel deviennent :

$$Q' = \int \sigma' ds = aQ \qquad\qquad V = \int \frac{\sigma' ds}{4\pi\varepsilon_0 r} = aV$$

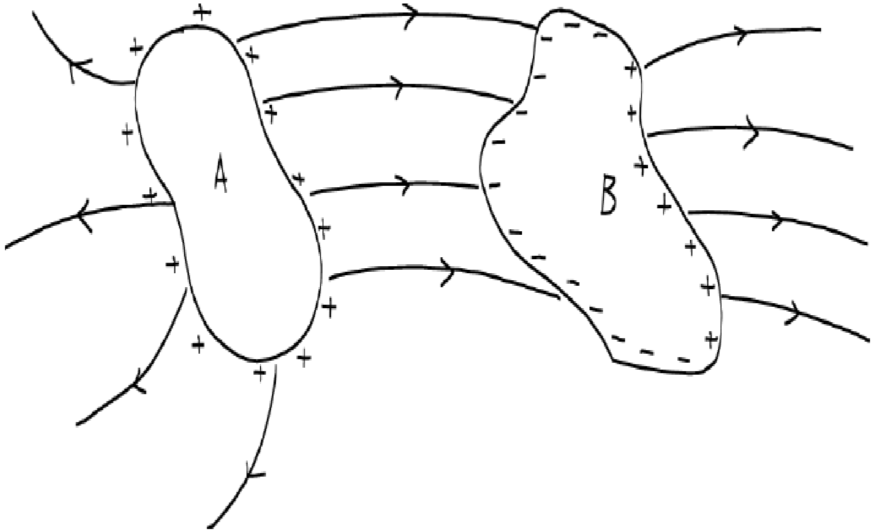
Le rapport *Q* / *V* est constant. Notons *C* ce rapport. Cette quantité est appelée **capacité du conducteur**. Elle est toujours positive et ne dépend que de la géométrie du conducteur. L'unité est le Farad (F).

- **Exemple**
  - Une sphère de rayon *R* a en surface une charge *Q*, induisant un potentiel

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

  - La capacité de la sphère est $\mathrm{C} = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R = 10^{-11} R$. Nous voyons par cet exemple que les capacités sont très faibles. Les unités les plus courantes sont donc le nF ou le µF.
  - Plus le rayon de la sphère conductrice est grand plus sa capacité à recevoir des charges et les répartir sur sa surface est grande.

- **Phénomène d’influence entre conducteur**
  - En approchant un conducteur B neutre du conducteur A, des charges négatives sur B seront attirées par les charges positives de A et s'accumuleront sur la surface faisant face au conducteur A. Alors que des charges positives vont apparaitre sur l'autre face de B (comme signe de manque de charges négatives).

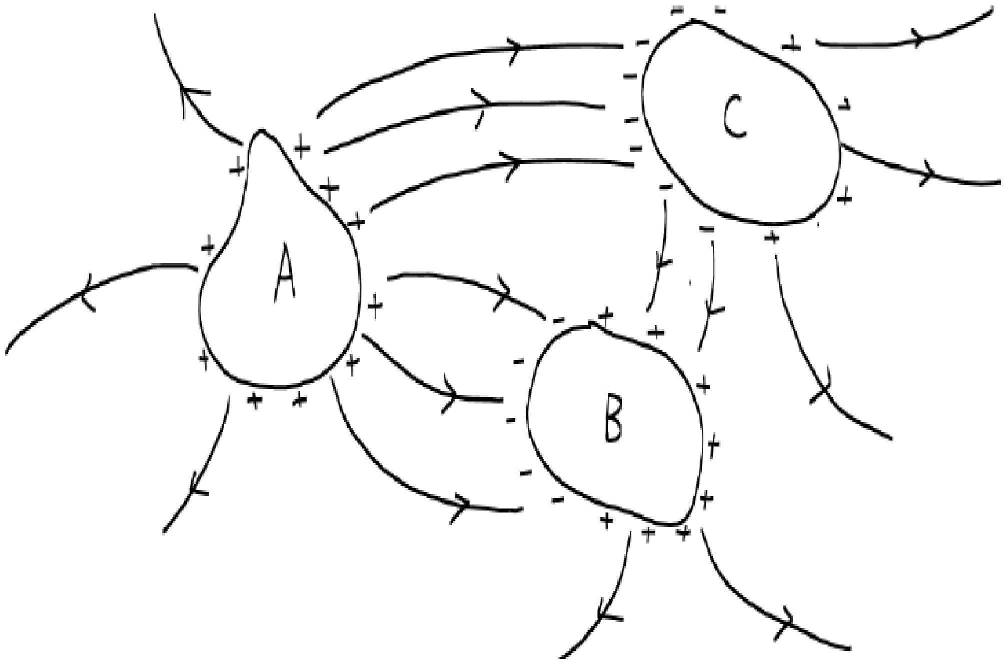


Cette nouvelle répartition des charges électriques sur B est due à ce qu'on appelle le phénomène d'influence mutuelle entre les deux conducteurs.

- Cette nouvelle situation aux conducteurs A et B prendra un temps fini pour se réaliser : on dit que les deux conducteurs passeront par un régime transitoire avant de voir s'établir un état d'équilibre entre eux.
- **Les lignes de champ** :
  - Des lignes de champ émanant de A vont atterrir sur la partie de la surface de B faisant face à A (car chargée négativement).
  - Des lignes de champ émaneront de B, et plus exactement de la région de la surface de B chargée positivement, vers d'autres lieux (pas A)

Si on rapproche un troisième conducteur C initialement neutre (isolé) des deux conducteurs A et B à l'état final décrit précédemment, des charges négatives vont apparaitre sur le côté de C faisant face à A (mais aussi celle faisant face à la surface positivement chargée du conducteur B).

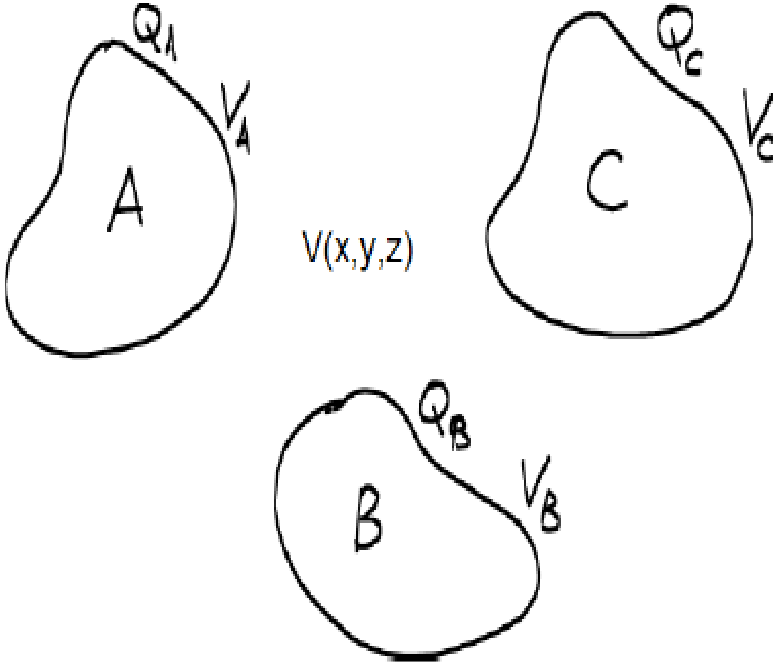
- Des charges positives apparaissent sur le conducteur C en signe de manque de charges électriques dans la région désertée par les charges électriques négatives.



- Cet ensemble des conducteurs (A chargé, B et C neutres) va générer dans l'espace un potentiel électrostatique

  V(x; y; z) vérifiant les conditions d'équilibre

  sur chaque conducteur :
  - V(x; y; z) prend la valeur VA aux points de coordonnées x, y et z appartenant au volume occupé par le conducteur A.
  - V(x; y; z) prend la valeur VB aux points appartenant au volume occupé par le conducteur B.
  - V(x; y; z) prend la valeur VC aux points appartenant au volume occupé par le conducteur C.



- Le potentiel V(x; y; z) admet donc une solution unique dans la région entre les conducteurs.

- Cette solution est obtenue à travers la résolution de l'équation de Poisson :

$$\Delta V(x, y, z) = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}$$

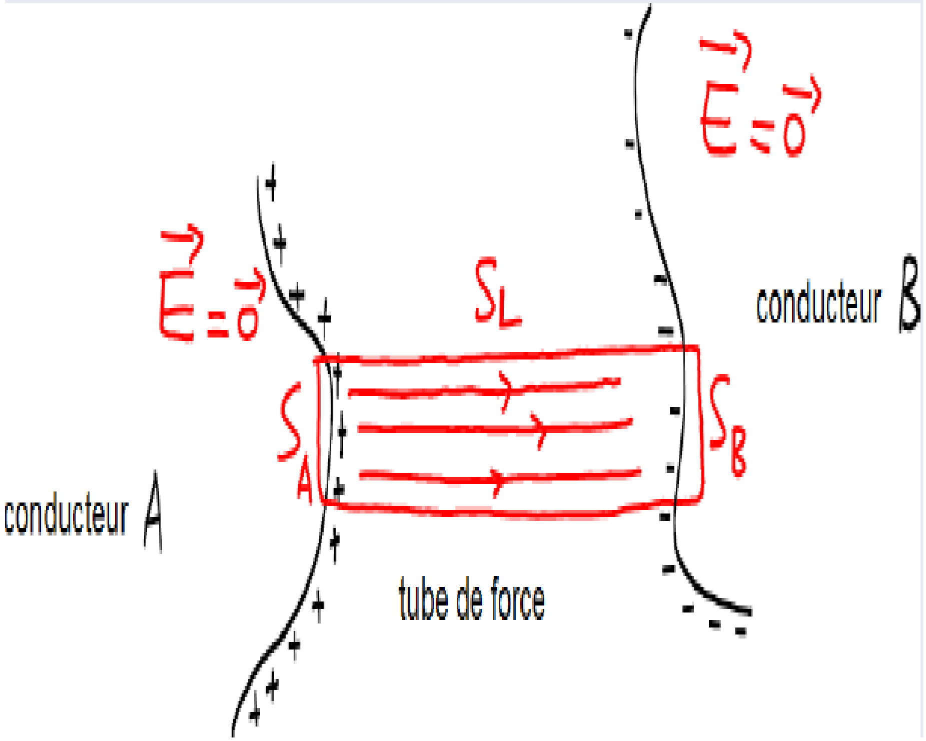
- Pas de charges électriques dans la région entre les conducteurs $\rho(x, y, z)$=0, d'où :

$$\Delta V(x, y, z) = 0$$ Equation de Laplace

- On peut rajouter une autre condition aux limites qui consiste à dire que le potentiel électrostatique V(x; y; z) à l'infini (là ou il n'y a pas de charges électriques) doit être nul !

- **Théorème des éléments correspondants**

Prenons deux surfaces très petites et opposées sur les deux conducteurs A et B. De ces surfaces sortent des lignes de champ (de A) et atterrissent sur B, avec un champ électrostatique normal à la surface. Cet ensemble de lignes forme ce qu'on appelle un tube de flux.



- Le flux du champ électrostatique à travers la surface fermée du cylindre reliant les conducteurs A et B

$$\oiint_{s} \vec{E}d\vec{s} = \iint_{s_A} \vec{E}d\vec{s} + \iint_{s_B} \vec{E}d\vec{s} + \iint_{s_L} \vec{E}d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- Le flux du champ électrostatique à travers la surface fermée du cylindre reliant les conducteurs A et B.

$$\oiint_{S} \vec{E}d\vec{s} = \underbrace{\iint_{S_A} \vec{E}d\vec{s}}_{=0} + \underbrace{\iint_{S_B} \vec{E}d\vec{s}}_{=0} + \underbrace{\iint_{S_L} \vec{E}d\vec{s}}_{=0} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

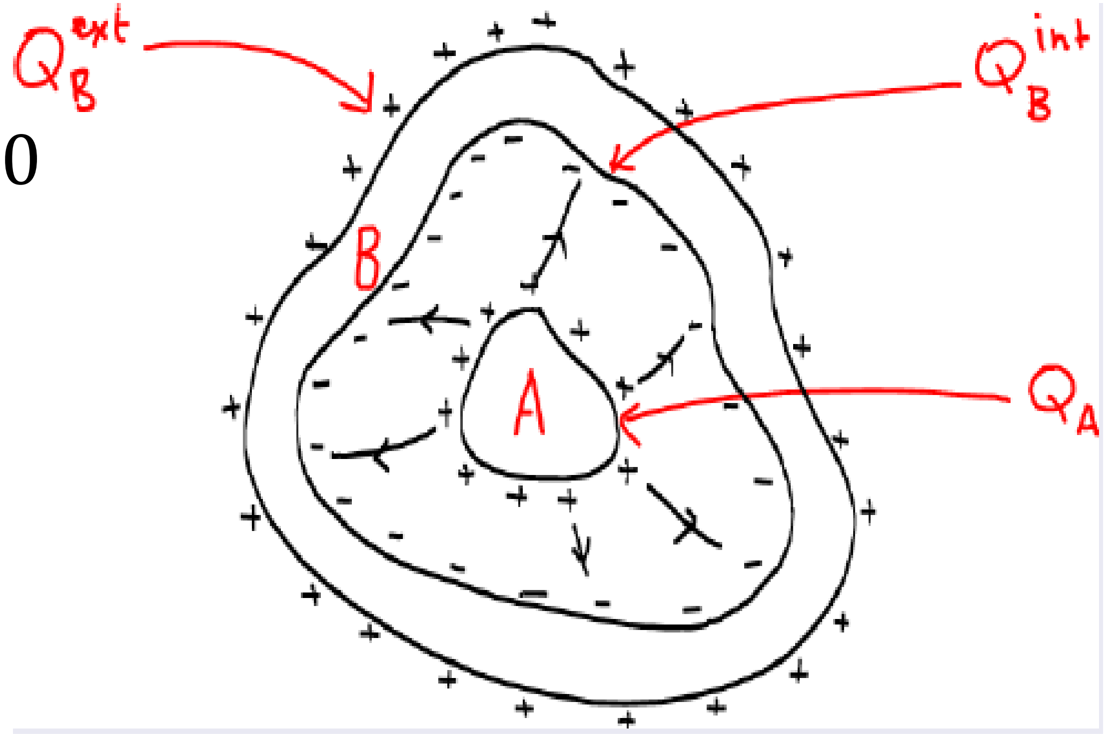
- Ce qui signifie que la charge électrique à l'intérieur de ce cylindre devrait être nulle !
- Mais on sait que les charges électriques existent bel et bien sur les deux surfaces opposées du tube. On conclut donc que la quantité de charges positives sur la surface de A faisant partie du cylindre est égale à la quantité de charges négatives sur la surface de B faisant partie du cylindre : $Q_{int} = Q_A + Q_B = 0 \Longrightarrow Q_A = -Q_B$

Deux éléments correspondants portent des charges égales et opposées.

- Ce type d'influence entre conducteurs est partiel car les lignes de champ sortant du conducteur A ne tombent pas toutes sur le conducteur B.
- On peut créer des conditions d'influence électrostatique totale en plaçant par exemple le conducteur A au sein (à l'intérieur) du conducteur B. Dans ce cas, toutes les lignes de champ électrostatique issues A vont toutes aboutir vers B.

$$Q_B = Q_B^{int} + Q_B^{ext} = 0$$

$$Q_A = -Q_B^{int} = Q_B^{ext}$$

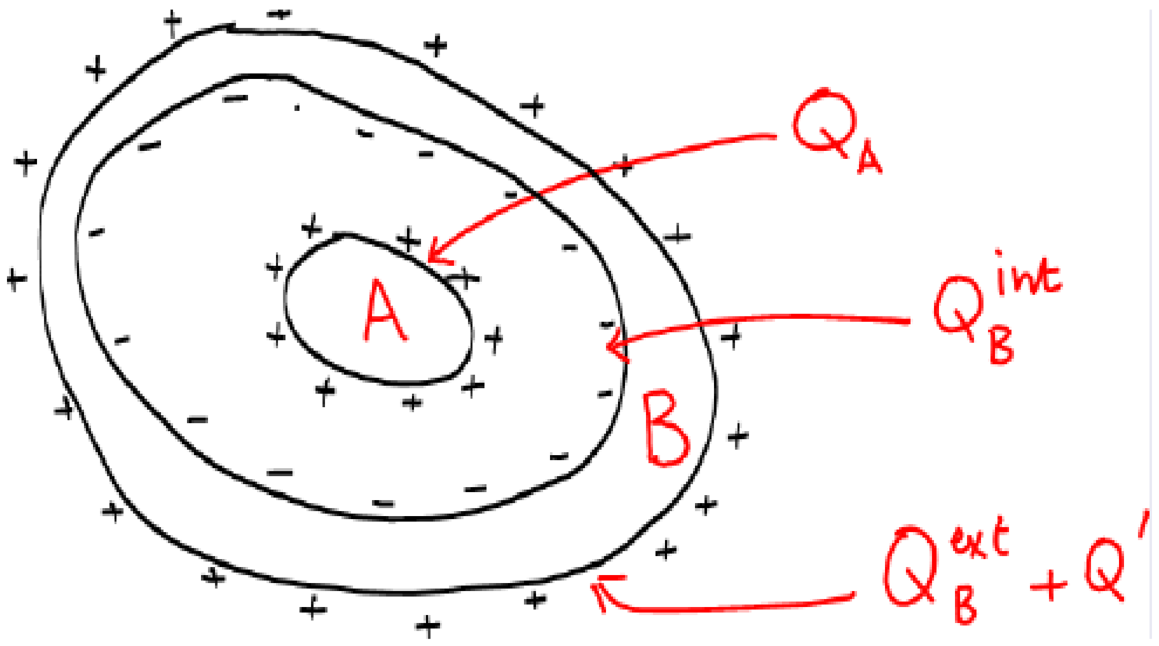


La charge électrique qui apparait sur la surface extérieure de B est égale exactement à la charge positive sur A.

- **Remarque importante**
  - On doit faire donc la distinction entre deux types de charges : charges libres sur A obtenues par électrisation de A, et les charges induites sur B dues à un réarrangement de ces propres charges électriques une fois rapproché de A.

- **Exemple**

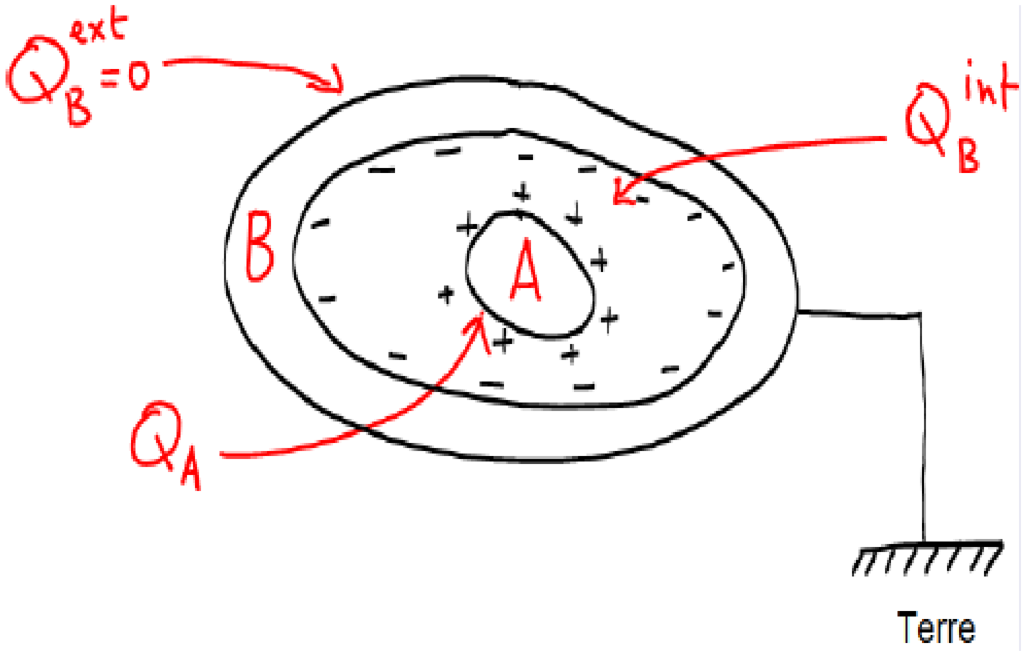
Le conducteur B est isolé mais porte initialement une charge électrique sur sa surface extérieure Q'_B . La charge électrique à l'extérieur de B est donc égale à la charge électrique libre Q'_B plus la charge induite par influence totale entre A et B, égale à QA, à savoir :



$$Q_B = Q'_B + Q_A$$

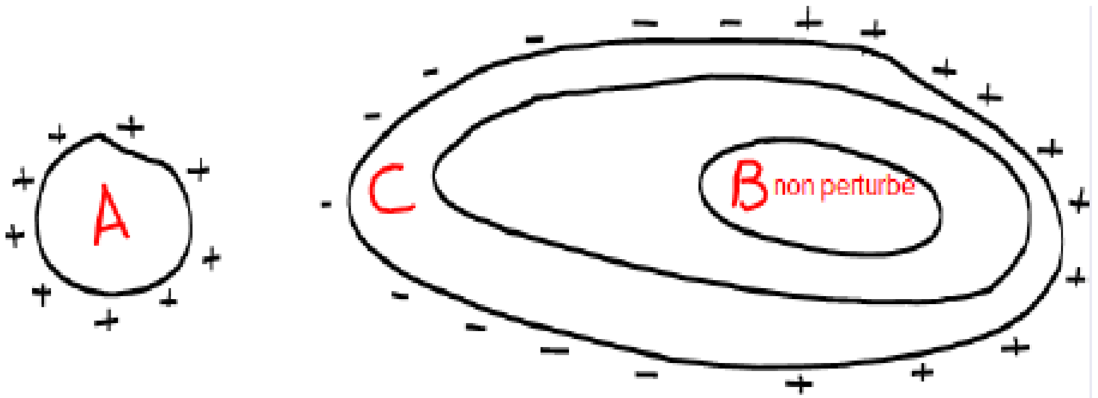
- Exemple

Le conducteur B est neutre mais relié au sol à l'aide d'un fil conducteur : Après que le phénomène d'influence ait lieu, les charges positives sur la surface externe de B seront comblées par des charges négatives de la terre à travers le l conducteur. Le conducteur B devient donc chargé négativement par influence totale de la part de A :

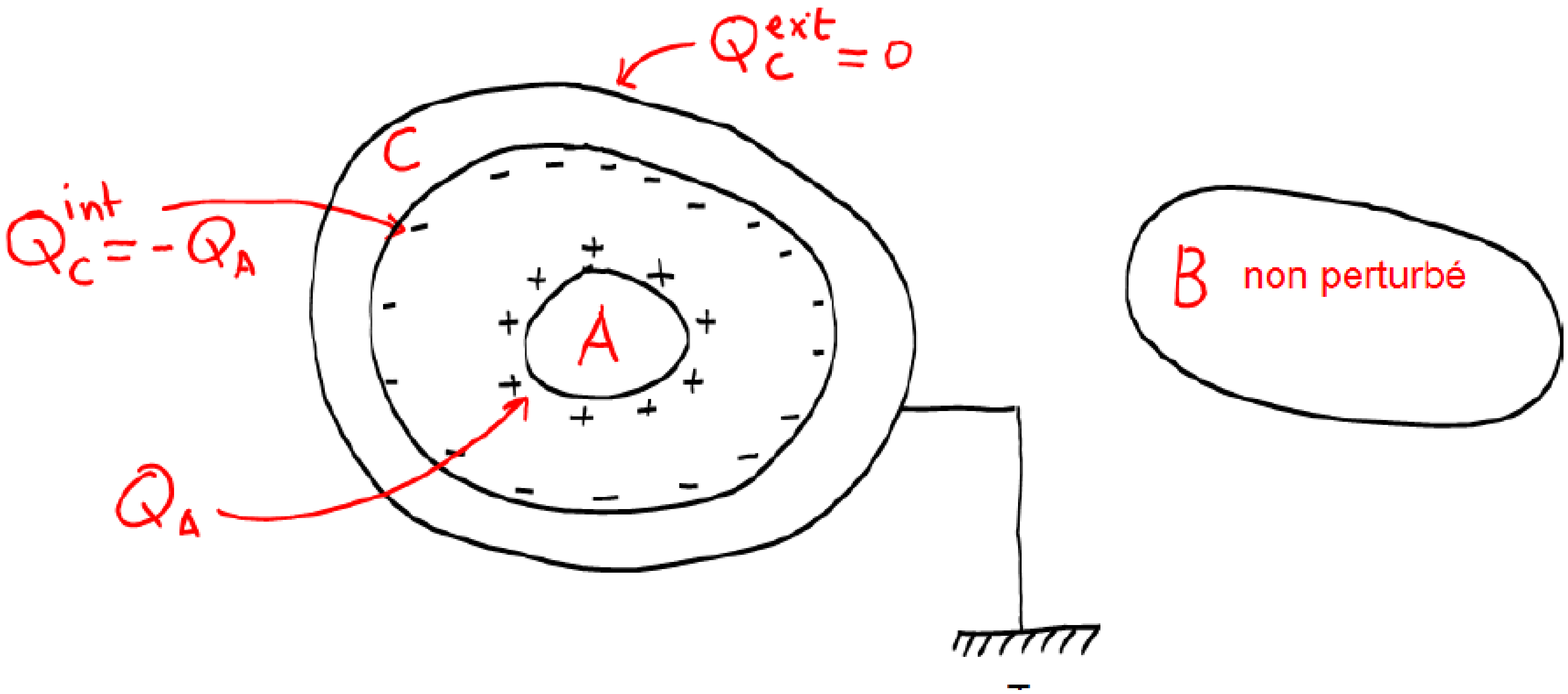


$$\mathrm{Q_B} = \mathrm{Q_B^{int}} + \mathrm{Q_B^{ext}} = \mathrm{Q_B^{int}} + 0 = -Q_A$$

- Ces résultats importants trouvent leurs applications dans la réalisation d'une isolation électrique qui permet d'éviter les perturbations qu'entraine des conducteurs chargés sur d'autres conducteurs.
- C'est bien là l'idée de la cage de Faraday, fabriquée par du métal, permettant d'effectuer des mesures à l'abri des champs extérieurs.

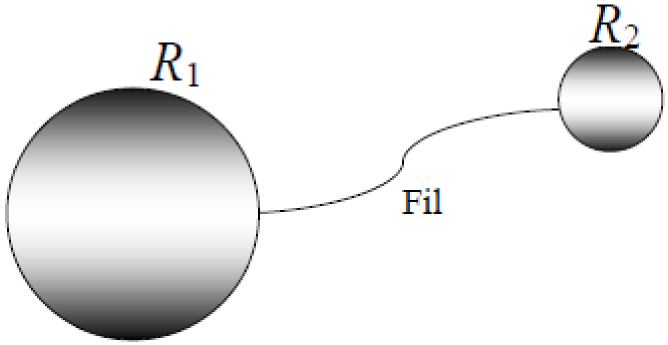


- Une autre façon de protéger le conducteur B des perturbations que peut causer le conducteur chargé A consiste à le mettre dans un conducteur creux et de relier celui-ci à la terre par un fil conducteur. La surface externe de C devient donc neutre ; donc pas de champ électrostatique à l'extérieur de C et B n'est pas perturbé.



- **Pouvoir des pointes**

Considérons deux conducteurs de forme sphérique de surfaces $4\pi R_1^2$ et $4\pi R_2^2$, sur lesquelles sont déposées des charges électriques Q_1 et Q_2,respectivement.



- A l'état initial, pas d'influence mutuelle entre les charges sur les deux sphères et les charges électriques y sont réparties uniformément. Le potentiel électrostatique des deux sphères:

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{\sigma_1 4\pi R_2^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0}$$

- On relie les deux sphères par un l conducteur (on néglige les effets électrostatiques sur le l) : à l’état final les deux sphères auront le même potentiel à l'équilibre on alors :

$$V_1 = V_2 \rightarrow \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}$$

  - Où encore

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_2 R_2}{R_1}$$

- La distribution surfacique sur la première sphère σ_1 dépend de σ_2 mais aussi du rapport de rayons des deux sphères
- Cette dernière équation montre que la sphère ayant le plus petit rayon porte la plus grande densité de charges

- le champ électrostatique créé dans l'espace par ces mêmes charges

$$E_n = \begin{cases} \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \text{ au voisinage de la sphère de rayon } \mathrm{R}_1 \\ \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \text{ au voisinage de la sphère de rayon } \mathrm{R}_2 \end{cases}$$

Ce champ est très élevé au voisinage des régions pointues (de rayon très petit) et est faible au voisinage des régions de faible courbure.

- Application

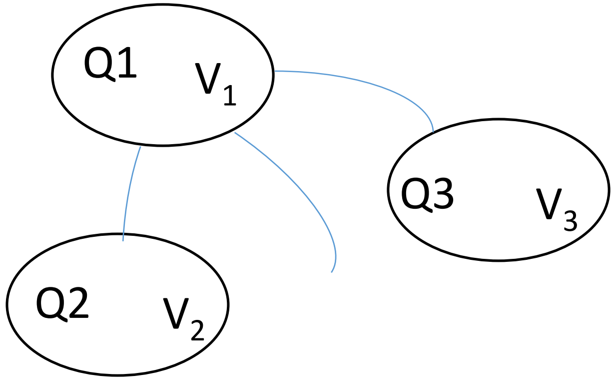
Le pouvoir de pointe est utile pour faciliter la décharge de l'électricité ; c'est le rôle des paratonnerres qu'on place sur les édifices pour les protéger contre la foudre.

- **Système de N conducteurs en équilibre**
  - Si on connaît pour un ensemble de conducteurs à l'équilibre électrostatique:
    - soit les potentiels de tous les conducteurs,
    - soit les charges de tous les conducteurs,
    - soit les potentiels de certains conducteurs et les charges des autres conducteurs.

  alors l'état d'équilibre est parfaitement déterminé car il n'existe qu'un seul état d'équilibre qui satisfasse les caractéristiques (Qi;Vi) des différents conducteurs

Pour déterminer les conditions d'équilibre, il faut tenir compte des charges et potentiels individuels mais aussi des influences mutuelles.

- 1er état d'équilibre : $V_1>0$, $V_2=0$, $V_3=0$



$$Q_{11} = C_{11}V_1 \text{ , } C_{11}>0$$
$$Q_{21} = C_{21}V_1, C_{21}<0 \quad \text{car charge } Q_{21}<0$$
$$Q_{31} = C_{31}V_1, C_{31}<0 \quad \text{car charge } Q_{31}<0$$

- 2éme état d'équilibre : $V_1=0$, $V_2>0$, $V_3=0$

$$Q_{12} = C_{12}V_2 \text{ , } Q_{22} = C_{22}V_2, Q_{32} = C_{32}V_2$$

- 3éme état d'équilibre : $V_1=0$, $V_2=0$, $V_3>0$

$$Q_{13} = C_{13}V_3 \text{ , } Q_{23} = C_{23}V_3, Q_{33} = C_{33}V_3$$

- Situation globale

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3$$
$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3$$
$$Q_3 = C_{31}V_1 + C_{32}V_2 + C_{33}V_3$$

Principe de superposition

- On peut généraliser la relation entre charges et potentiels à un système de *n* conducteurs. Sous forme matricielle, cette relation s'écrit :

$$[\mathrm{Q_i}] = [\mathrm{C_{ij}}][\mathrm{V_j}]$$

  - Propriétés de la matrice *C* :
    - Elle est symétrique : $C_{i\,j} = C_{ji}$ (identité de Gauss),
    - Les termes diagonaux sont positifs : $C_{ii} > 0$, ils constituent les coefficients de capacité,
    - Les termes non diagonaux sont négatifs : $C_{i\,j} < 0$, ce sont les coefficients d'influence.

- **Cas particulier d'un système de deux conducteurs en influence totale**

$$Q_1 = \mathrm{C}_{11}\mathrm{V}_1 + \mathrm{C}_{12}\mathrm{V}_2$$
$$Q_2 = \mathrm{C}_{21}\mathrm{V}_1 + \mathrm{C}_{22}\mathrm{V}_2$$

Avec $C_{21} = C_{12}$

- Si le corps (2) entoure le corps (1), l'influence est totale, on a alors :

$$Q_1 = -Q_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{C}_{11}\mathrm{V}_1 + \mathrm{C}_{12}\mathrm{V}_2 = -\mathrm{C}_{21}\mathrm{V}_1 - \mathrm{C}_{22}\mathrm{V}_2$$

$$\Longrightarrow \quad C_{11} = C_{22} = -C_{12}$$

En posant $C_{11} = C$

$$Q_1 = C(\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2)$$
$$Q_2 = C(\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_1)$$

Le système constitue un *condensateur* et C représente sa capacité.

- **Capacité d’un condensateur**
  - **Définition**

  Un condensateur est tout système de deux conducteurs (armatures) en influence(totale ou partielle).

  - la connaissance de la charge Q_1 (ou Q_2) et de la différence de potentiel (d.d.p) $(V_1 - V_2)$ permet de déterminer la capacité C du condensateur.
  - Lorsque des considérations de symétrie permettent d’appliquer le théorème de Gauss, le calcul de la capacité C peut se faire très aisément.

- **Condensateur sphérique**

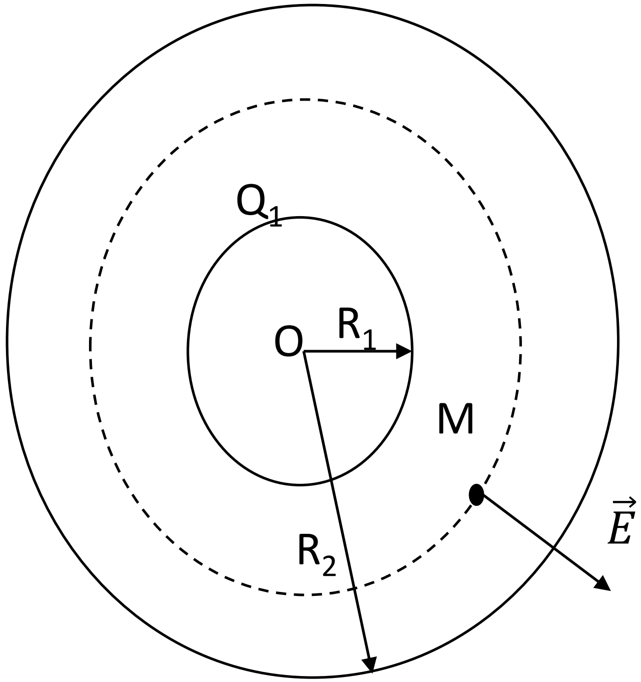
Pour un point *M*, situé entre les deux armatures et tel que *OM* = *r*, on peut écrire :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

$$dV = -Edr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r} + cte$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

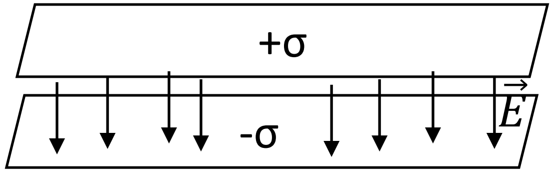
$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}$$



- **Condensateur plan**

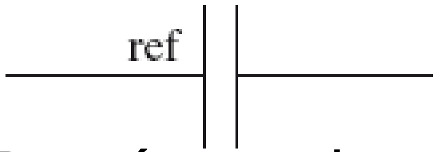
Les armatures sont constituées par deux plans parallèles de surface *S*, distants de *e*. Entre les deux armatures, on a :

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_{12}} \qquad \overrightarrow{E_2} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_{21}}$$



Le champ total est donc :

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_{12}}$$



Représentation schématique d'un condensateur.

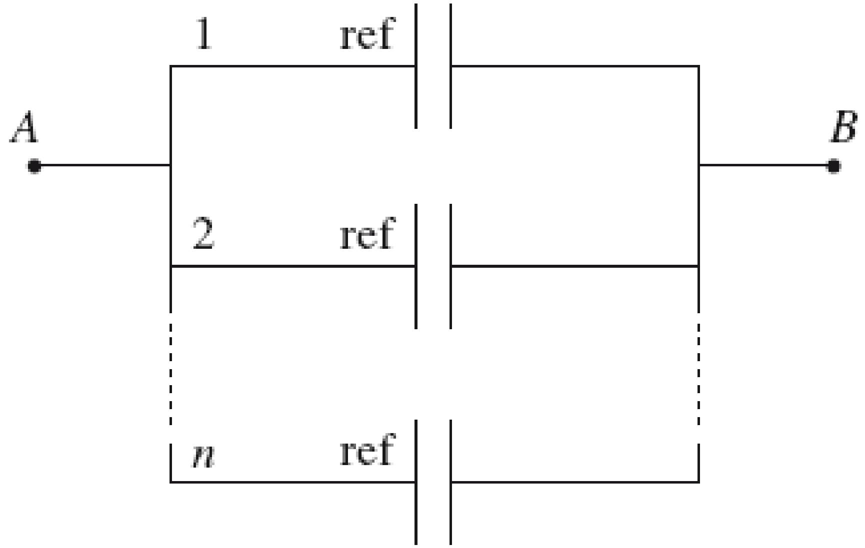
On en déduit la d.d.p : $V_1 - V_2 = Ee = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0} = \frac{Qe}{S\varepsilon_0}$

d'où $$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{S\varepsilon_0}{e}$$

Cette capacité est d'autant plus grande que *S* est grand et *e* petit. Dans le vide toutefois, une distance *e* trop faible peut favoriser la présence entre les plaques d'arcs électriques induisant des processus de décharge. Pour éliminer ces « claquages », il convient d'isoler les plaques en introduisant entre elles un « isolant diélectrique ».

- **Condensateur en parallèle**

Considérons par exemple *n* condensateurs, de capacités *C*1, *C*2, *C*n... Relions toutes les armatures internes de ces condensateurs au même point A de potentiel V_A et toutes les armatures externes à un autre point B de potentiel V_B.



$$\mathrm{V_A} - \mathrm{VB} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \cdots$$

La charge totale *Q* supportée par l'ensemble des

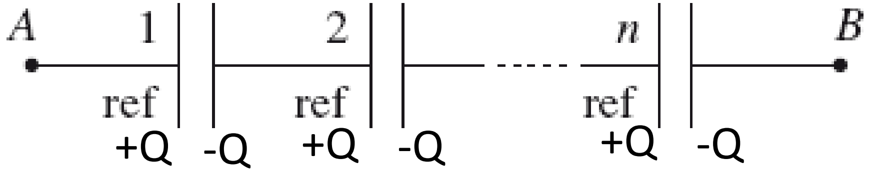
armatures internes est:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots Q_n = (\mathrm{V_A} - \mathrm{VB})(C_1 + C_2 + \cdots C_n)$$

la capacité équivalente *C* d'un tel système : $C = \dfrac{Q}{(\mathrm{V_A} - \mathrm{VB})} = \sum_n C_n$

- **Condensateurs en série**

Considérons le même système de condensateurs mais relions maintenant l'armature externe du condensateur *i* à l'armature interne du condensateur i_1*+1*. Appliquons une différence de potentiel $V_A - V_B$ aux bornes de ce montage



$$\mathrm{V_A} - \mathrm{VB} = (\mathrm{V_A} - V_{I1}) + (V_{I1} - V_{I2}) + \cdots (V_{In-1} - \mathrm{V_B})$$

$$\mathrm{V_A} - \mathrm{VB} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \cdots + \frac{Q_n}{C_n} = Q \sum_n \frac{1}{C_n}$$

un système de condensateurs en série est équivalent à un condensateur dont la capacité *C* vérifie la relation :

$$\frac{1}{C} = \sum_n \frac{1}{C_n}$$

Energie électrostatique

- **Définition**

l'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique est égale au travail qu'il faut fournir pour amener de façon quasi-statique cette particule de l'infini à sa position actuelle.

- Le travail fourni par l'opérateur sera donc

$$\mathrm{W(M)} = -\mathrm{q}\int_{\infty}^{\mathrm{M}} dW = -\mathrm{q}\int_{\infty}^{\mathrm{M}} \vec{E}d\vec{r} = \mathrm{q}[V(M) - V(\infty)]$$

- On obtient l'expression suivante pour l'énergie électrostatique d'une charge ponctuelle située en M

$$\mathrm{E_P} = \mathrm{qV(M)}$$

- **Energie électrostatique d'un ensemble de charges ponctuelles**

lorsqu'on a affaire à un ensemble de N charges ponctuelles q_i, chacune d'entre elles va créer sur les autres un champ électrostatique et ainsi mettre en jeu une énergie d'interaction électrostatique.

- **Cas de deux charges ponctuelles**

Soit la charge ponctuelle q_1 placée en M_1. On amène alors une charge q_2 de l'infini jusqu'en M_2, c'est à dire que l'on fournit un travail :

$$E_{P2} = q_2 V_1(M_2)$$

Ce travail est identique à celui qu'il aurait fallu fournir pour amener la charge ponctuelle q_1 en M_1 n présence de q_2 en M_2 :

$$E_{P1} = q_1 V_2(M_1)$$

- Cela signifie que ce système constitué de 2 charges possède une énergie électrostatique

$$\mathrm{E_P} = \mathrm{EP_1} = \mathrm{EP_2} = \frac{1}{2}[E_{P1} + E_{P2}] = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 M_1 M_2}$$

- **Cas de 3 charges**

Si maintenant on amène une 3ème charge q3 de l'infini jusqu'en P_3(q_1 et q_2 fixes), il faut fournir un travail supplémentaire

$$\mathrm{E_{P3}} = \mathrm{q_3 V_{1+2}(M3)} = \mathrm{q_3[V_1(M3) + V_2(M3)]} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_3}{M_1 M_3} + \frac{q_3 q_2}{M_3 M_2}\right]$$

correspondant à une énergie électrostatique de ce système de 3 charges

$$\mathrm{E_P} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_2}{M_1 M_2} + \frac{q_1 q_3}{M_1 M_3} + \frac{q_2 q_3}{M_2 M_3}\right]$$

- **Système de N charges**

On voit qu'à chaque couple q_iq_j est associée une énergie potentielle d'interaction. Pour un système de N charges on aura alors:

$$E_P = \sum_{couples} q_i V_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

où

- r_{ij} est la distance entre deux charges
- le facteur 1/2 apparaît parce que chaque couple est compté deux fois.

- **Distribution continue de charge**

Pour une distribution continue de charges, la généralisation de la formule précédente est évidente. Soit dq la charge située autour d'un point P quelconque de la distribution. L'énergie électrostatique de cette distribution s'écrit

$$E_P = \frac{1}{2} \int_{distribution} dqV(P)$$

où

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{distribution} \frac{dq(P')}{PP'}$$

- **ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE EMMAGASINÉE DANS LES CONDUCTEURS CHARGÉS**
  - **Cas d'un conducteur**

Soit un conducteur isolé, de charge Q distribuée sur sa surface S. L'énergie potentielle électrostatique de ce conducteur est alors:

$$E_P = \frac{1}{2}\int_S dqV(P) = \frac{QV}{2} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

Ceci est l'énergie nécessaire pour amener un conducteur de capacité C au potentiel V. Puisque cette énergie est toujours positive cela signifie que, quel que soit V (et donc sa charge Q), cela coûte toujours de l'énergie.

- **Cas de N conducteur en équilibre**

Soit un ensemble de N conducteurs chargés placés dans un volume V. A l'équilibre, ils ont une charge Q_i et un potentiel V_i. En dehors du volume occupé par chaque conducteur, il n'y a pas de charge donc dq=0. L'énergie électrostatique de cette distribution de charges est alors simplement :

$$E_P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i$$

- **Exemple : Le condensateur**

Soit un condensateur constitué de deux armatures. L'énergie électrostatique de ce système de deux conducteurs est:

$$E_P = \frac{1}{2}[Q_1V_1 + Q_2V_2] = \frac{Q}{2}[V_1 - V_2]$$

Ainsi donc, un condensateur peut emmagasiner de l'énergie électrostatique. Mais où est-elle stockée ? Sous quelle forme ?

- Prenons le cas d'un condensateur plan de densité surfacique σ uniforme et dont les armatures, séparées d'une distance d, ont une surface S commune. L'énergie de ce condensateur s'écrit

$$E_P = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(\sigma S)^2}{\frac{\varepsilon_0 S}{d}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}Sd = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}V$$

où V est le volume compris entre les deux armatures, où réside le champ E. On voit donc sur cet exemple que l'énergie du condensateur est stockée dans le champ lui-même.

Electrocinétique

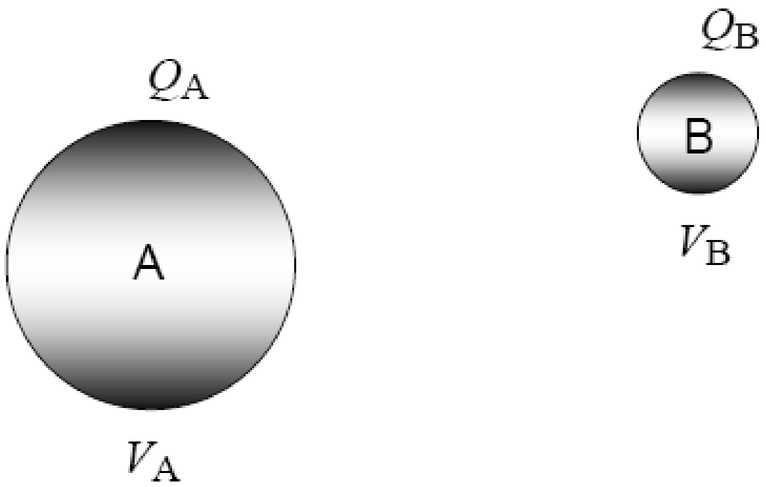
- **Qu’est-ce que l’électrocinétique**

L’électrocinétique est l’étude du mouvement d’ensemble des porteurs de charge dans un circuit que l’on appelle courant électrique. Les charges se déplacent sous l’effet d’un champ électrique extérieur.

- **Origine du courant électrique**

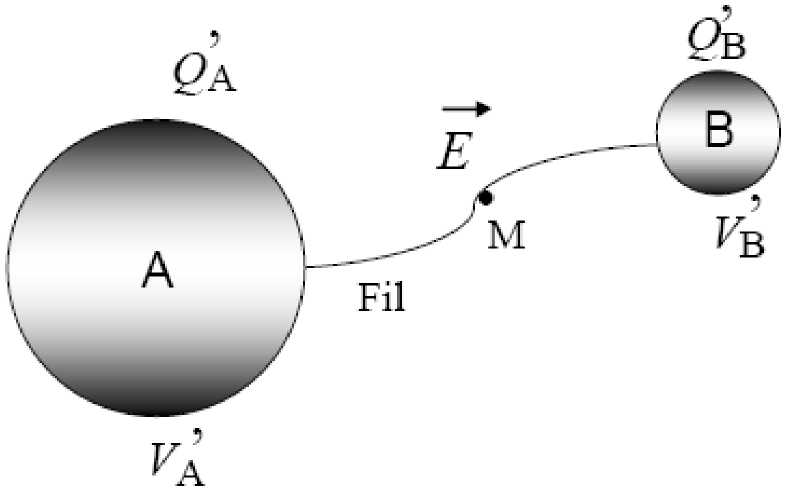
Deux conducteurs A et B séparés

$V_A > V_B$



Les Deux conducteurs A et B reliés par un fil conducteur

$V'_A = V'_B = V_M$

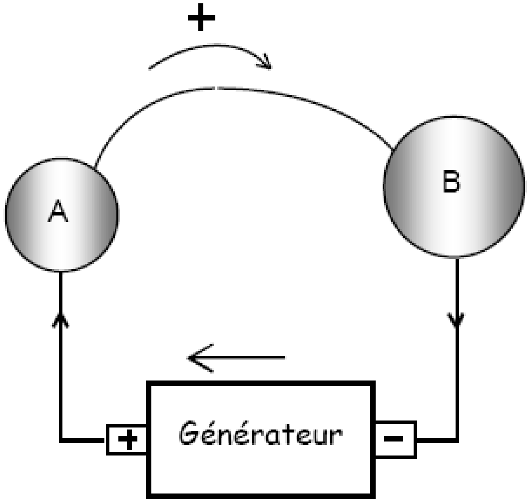


- L'équilibre se rompt et un mouvement de charges électriques apparait.
- Cette circulation de charges correspond au passage d'un *courant électrique* dans le fil de connexion.

- **Courant permanent**

Pour avoir une circulation permanente du courant électrique, il faut maintenir un état de déséquilibre entre les deux conducteurs A et B lorsqu'ils sont reliés.

- Ceci peut être réalisé à l'aide d'appareils que l'on appelle générateurs



- **Sens conventionnel du courant**

Le sens conventionnel du courant, choisi par Ampère au début du dix neuvième siècle, est opposé à celui des électrons.

- **Intensité du courant**

L'intensité I du courant électrique est, par définition, la quantité d'électricité dQ qui traverse la section S pendant un intervalle de temps dt.

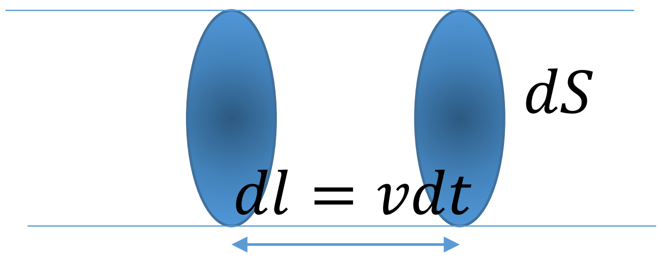
$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dt}}$$

Son unité est l'ampère (A)

- Un courant électrique est dit <u>continu</u> si son intensité *I* reste constante au cours du temps et <u>variable</u> si son intensité change au cours du temps

- **Vecteur densité de courant**

La quantité de charge *dQ* , qui traverse la section *dS* perpendiculaire à l'axe du tube de courant, occupe, pendant un temps *dt*, un volume cylindrique : $\mathrm{d\tau} = \mathrm{dldS} = \mathrm{vdtdS}$:



$$\mathrm{dQ} = \rho\mathrm{d\tau} = \rho\mathrm{vdtdS}$$

- $\vec{v}$ et $\mathrm{d}\vec{S}$ sont ici parallèles. Dans le cas où $\mathrm{d}\vec{S}$ n'est plus parallèle à $\vec{v}$

$$\mathrm{dQ} = \rho\vec{v}\mathrm{dtd}\vec{S} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \rho\vec{v}\mathrm{d}\vec{S} = \vec{j}d\vec{S}$$

- On voit alors apparaître un vecteur qui décrit les caractéristiques du milieu conducteur et qu'on appelle ***la densité de courant***

$$\vec{j} = \rho\vec{v}$$

- L'intensité du courant électrique apparaît comme le flux du vecteur $\vec{j}$ à travers la surface *S*.

$$\mathrm{I} = \iint_{S} \vec{\mathrm{j}}\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}$$

l'unité de j est mesurée en (A/m²)

- Dans le cas des métaux les charges mobiles sont les électrons on alors:

$$\vec{\mathrm{j}} = -\mathrm{n}\mathrm{e}\vec{\mathrm{v}}$$

n: Densité des charges

e: charge élémentaire

La densité de courant (donc le sens attribué à I) est ainsi dans le sens contraire du déplacement réel des électrons.

- **Loi d’Ohm**
    - **Loi d’Ohm à l’échelle macroscopique**

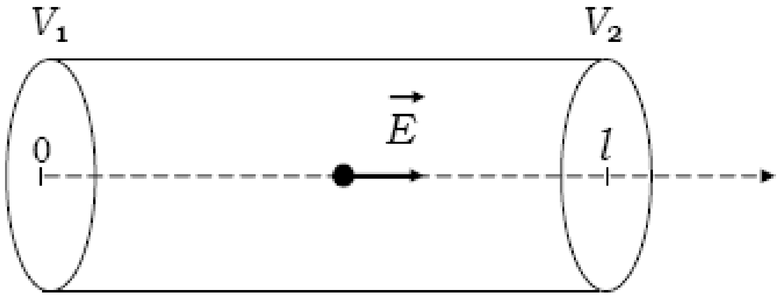
Le rapport, entre la différence de potentiel U entre deux points d’un conducteur métallique et le courant qui le traverse, est constant, la température étant maintenue constante.

$$U = RI$$

C’est la loi d’Ohm. La constante R est, par définition, la résistance électrique du conducteur, elle est exprimée en ohms (Ω).

- **Forme locale de la loi d'Ohm**
    - **Conductivité $\boldsymbol{\sigma}$**

Un conducteur cylindrique, de longueur *l* et de section *S,* est soumis à une différence de potentiel *V* : il en résulte, en tout point du conducteur, un champ électrique *E* tel que :



$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -E \int_0^l dl \Rightarrow U = V_1 - V_2 = El$$

D'après la loi d'Ohm $\quad U = RI = RjS = El$

$$\Rightarrow \mathrm{j} = \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{RS}}\mathrm{E} = \sigma\mathrm{E} \ \text{ avec } \sigma = \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{RS}}$$

σ est la conductivité du conducteur; elle est exprimée en $\Omega^{-1}m^{-1}$ ou en siemens par mètre ($S.\ m^{-1}$).

- **La résistivité**

On définit également η = 1/σ , la **résistivité** du milieu. Qui traduit la difficulté des e- à se déplacer (collision avec les impuretés contenues dans le matériau)

- **Mouvement des électrons dans un conducteur.**

L'effet du réseau cristallin sur le mouvement des électrons se traduit par une force de freinage de la forme :

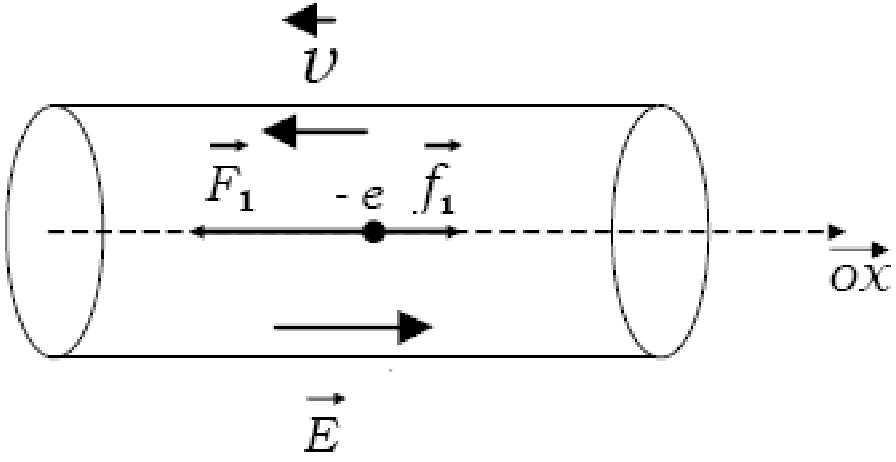
$$\vec{\mathrm{f}} = -\mathrm{k}\vec{\mathrm{v}}$$

En écrivant le PFD

$$\vec{\mathrm{f}} + \vec{\mathrm{F}} = \mathrm{m}\vec{\mathrm{a}}$$

La projection de cette relation

$$-\mathrm{k}v_x - \mathrm{eE} = \mathrm{m}a_x$$



- On peut écrire cette équation

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{k}{m} v_x = -\frac{e}{m} E$$

La solution générale

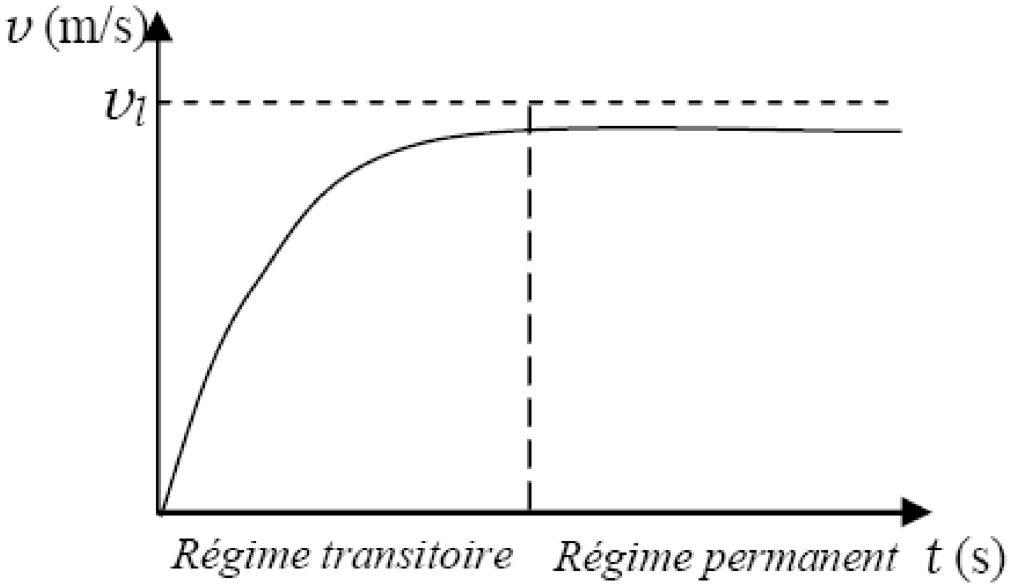
$$v_x(t) = -\frac{e}{k} E + A e^{-\frac{k}{m}t}$$

En tenant compte de la condition initiale $v_x(t) = 0$, on obtient la constante $\mathrm{A} = \frac{e}{k} E$

$$v_x(t) = -\frac{e}{k} E (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

$$v_l = \frac{e}{k} E$$

la vitesse limite atteinte par les électrons



- **Mobilité des électrons**

La vitesse est reliée au champ électrique par:

$$\vec{v} = \frac{e}{k}\vec{E}$$

On peut l'écrire sous forme $\vec{v} = \mu\vec{E}$

μ est la mobilité elle s'exprime en m²/ V.s.

En fonction de la conductivité on a :

$$\sigma = \frac{ne^2}{k} = ne\mu \quad \text{soit } \mu = \frac{\sigma}{ne}$$

- **Effet Joule.**

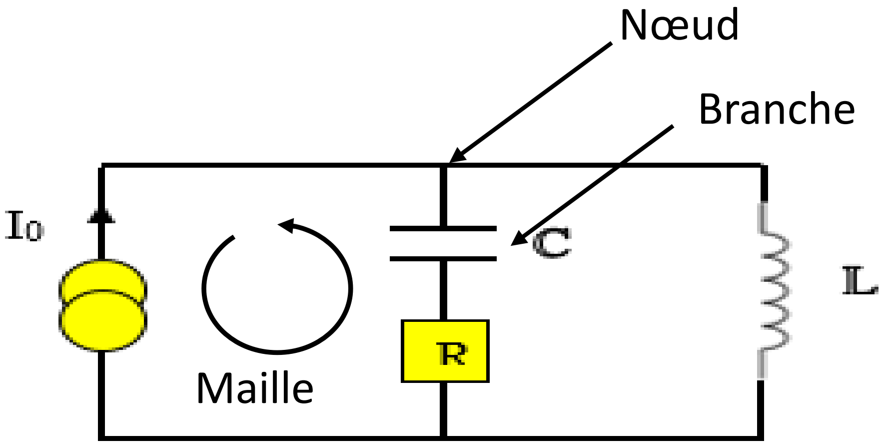
La circulation d'un courant *I* à travers un conducteur électrique, entraîne une perte d'énergie qui se traduit par un échauffement (dû aux collisions et aux frottements).

- Si *dQ* est la quantité de charge qui passe d'un point A à un point B du conducteur, le travail des forces électriques est :

$$\mathrm{dW} = (\mathrm{V_A} - \mathrm{V_B})\mathrm{dQ} = (\mathrm{V_A} - \mathrm{V_B})\mathrm{Idt} = \mathrm{RI^2dt}$$

$$\mathrm{P} = \frac{dW}{dt} = \mathrm{RI^2}$$ Puissance dissipé par effet joule

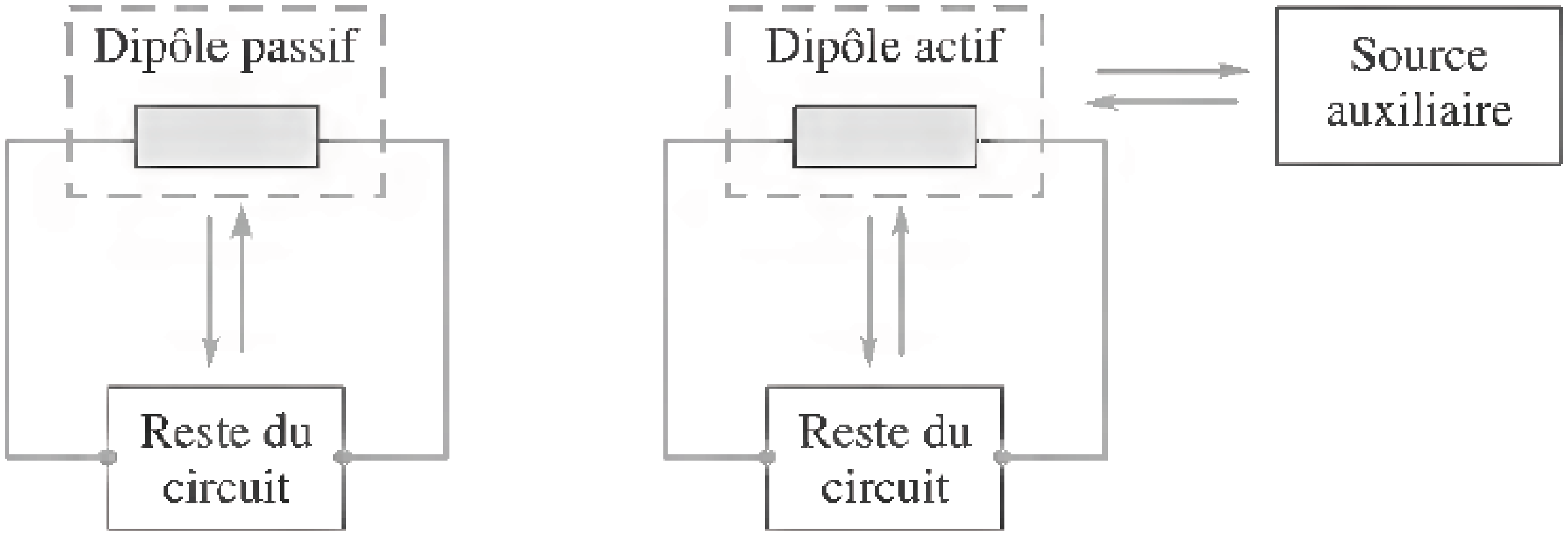
- ***Eléments d’un circuit électrique***
  - **Définitions :**
    - Un circuit électrique est constitué d’un ensemble de dispositifs appelés **dipôles**, reliés entre eux par un fil conducteur et formant ainsi une structure fermée.
    - Un *nœud* d’un circuit est une interconnexion où arrivent 3 fils ou plus.
    - Une branche est un tronçon de circuit situé entre deux nœuds.
    - Une maille est un ensemble de branches qui forment une boucle fermée.



- **Propriétés d’un Dipôle**
  - **Dipôle passif**

  Un dipôle, et plus généralement un composant de circuit électrique, est dit passif n'échange de l'énergie qu'avec le circuit auquel il est connecté
  - **Dipôle actif**

  Un dipôle est actif s'il échange de l'énergie avec le circuit et avec une source auxiliaire

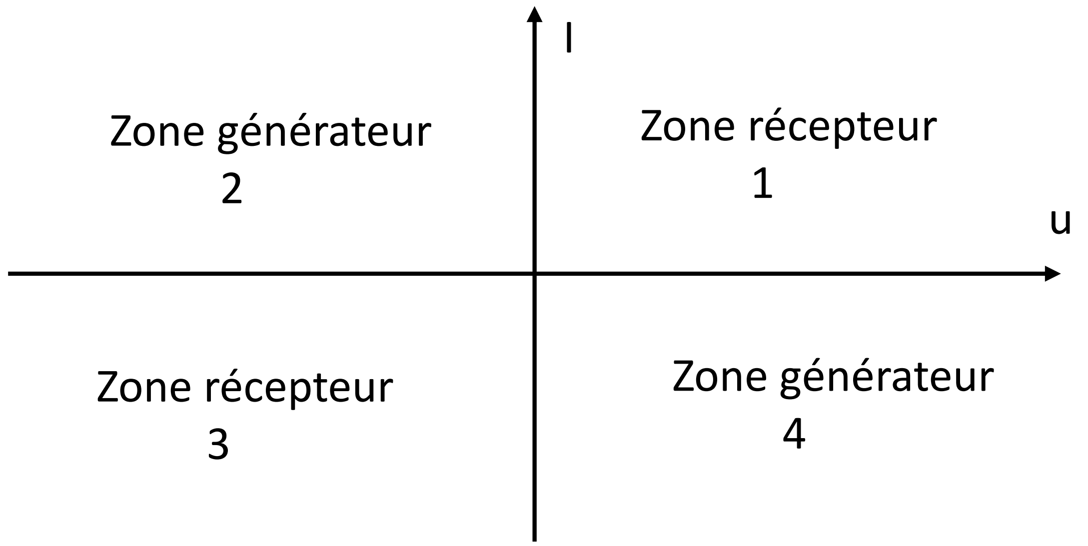


- **Dipôle récepteur**

Un dipôle se comporte en récepteur lorsqu'il reçoit de la puissance du circuit. Le produit UI est positif et il fonctionne donc dans les quadrants 1 ou 3 de sa caractéristique.

- **Dipôle générateur**

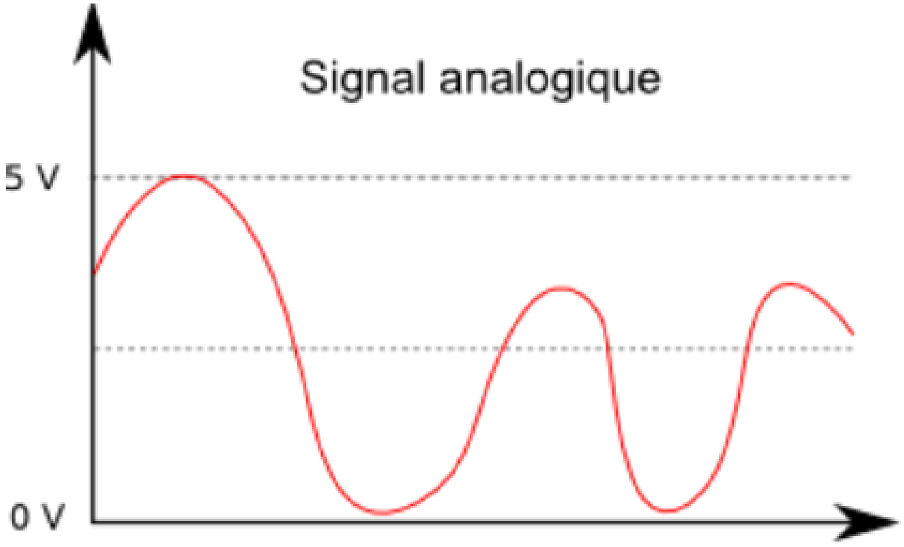
Un dipôle se comporte en générateur lorsqu'il fournit de la puissance au circuit. Le produit UI étant négatif, son point de fonctionnement est situé dans les quadrants 2 ou 4 de sa caractéristique

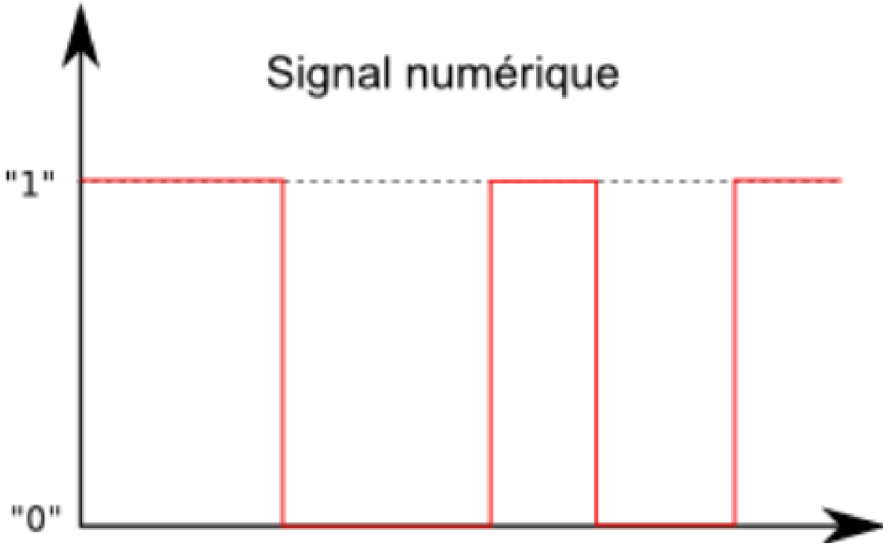


• **SIGNAUX**

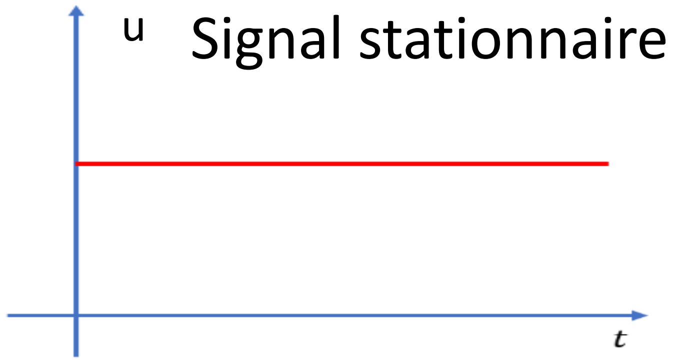
En électronique, un signal est une tension ou un courant qui peuvent soit transporter une information,

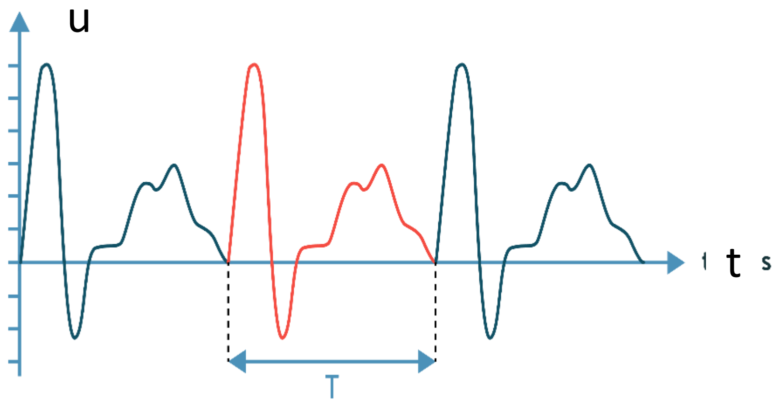
- On distingue deux types de signaux issus de deux technologies distinctes :
  - Signal analogique (variation temporelle est continue).
  - Signal numérique ou digital (varie entre plusieurs niveaux discrets).



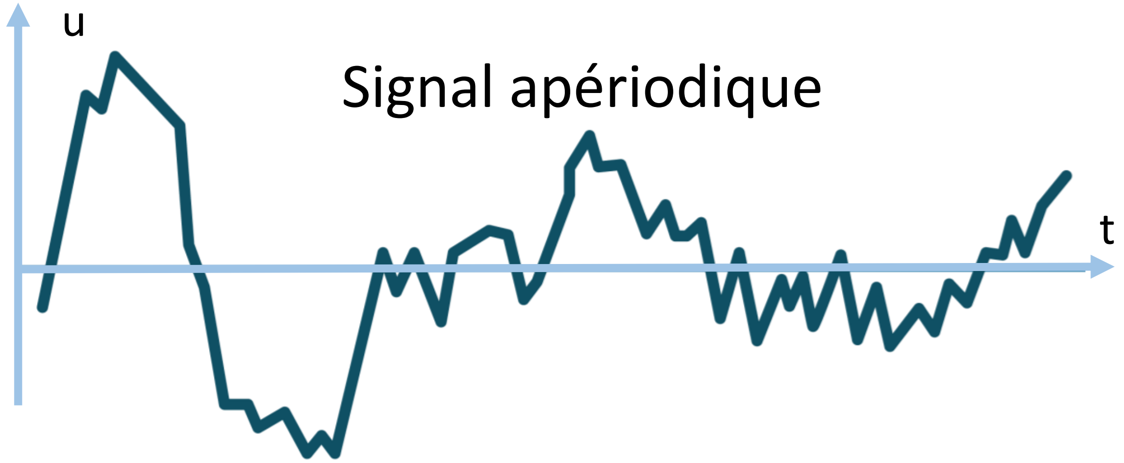


- On classe habituellement les signaux, selon leur « forme » au cours du temps :
  - les signaux stationnaires ont une valeur qui n'évolue pas au cours du temps
  - les signaux variables varient au cours du temps ces derniers se classent en deux catégories :
    - les signaux périodiques caractérisé par sa période T et sa fréquence f
    - les signaux apériodiques.





Signal périodique



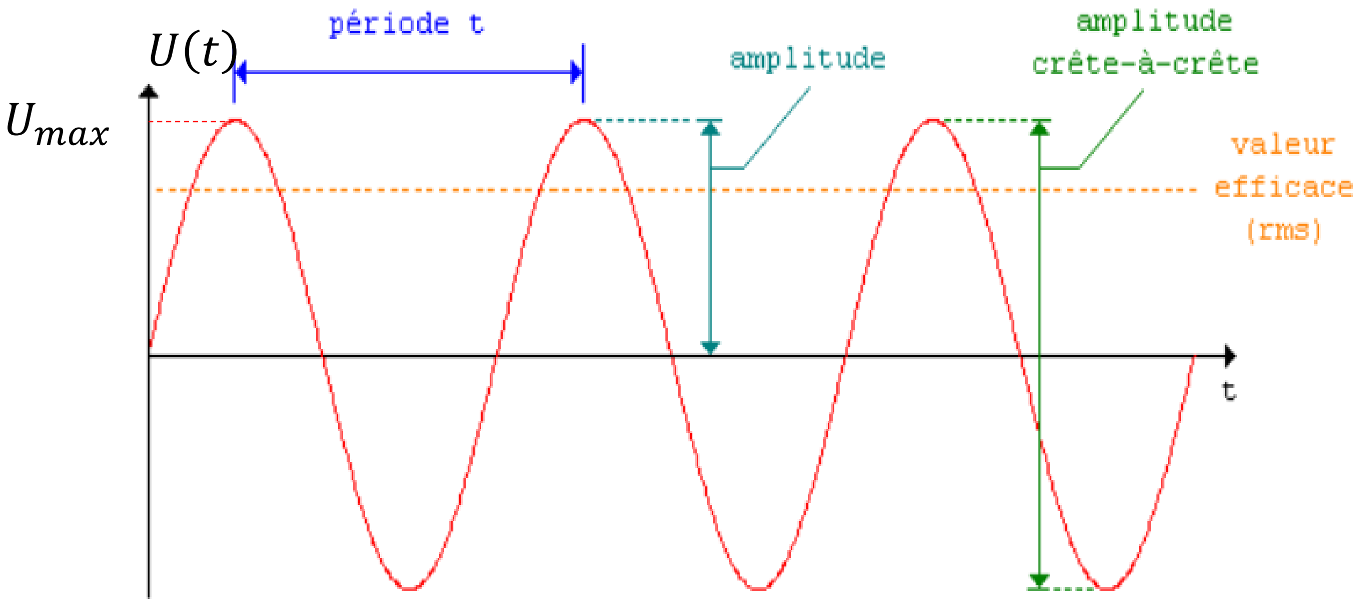
- **Signaux harmoniques ou sinusoïdaux**

le signal sinusoïdal (ou harmonique) occupe une place particulière pour plusieurs raisons. En particulier, il est possible de montrer que tout signal périodique peut se mettre sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux.

- Un signal sinusoïdal s'écrit sous la forme suivante :

$$U(t) = U_{max}\sin(\omega t + \varphi)$$

U_{max} est l 'amplitude crête
ω : pulsation en rad/s = $2\pi f$
f : fréquence en Hz = 1/T
T : période en secondes
φ : phase à l 'origine en radians



- On définit, pour le signal périodique *U(t),* les grandeurs caractéristiques suivantes :
  - Valeur efficace : ${U_{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} U^2(t)dt$
  - Valeur moyenne : $U_{moy} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} U(t)dt$
- **Représentation complexe**

Un signal sinusoïdal $\mathrm{U(t)} = \mathrm{U_{max}}\sin(\omega\mathrm{t} + \varphi)$ peut s'écrire sous forme complexe :

$$\underline{\mathrm{U}}(\mathrm{t}) = \underline{U_m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}} \quad \text{avec} \quad \underline{U_m} = \mathrm{U_{max}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

- la valeur réelle du signal physique s'obtient simplement en écrivant :

$$\mathrm{U(t)} = \mathcal{R}e(\underline{\mathrm{U}}(\mathrm{t}))$$

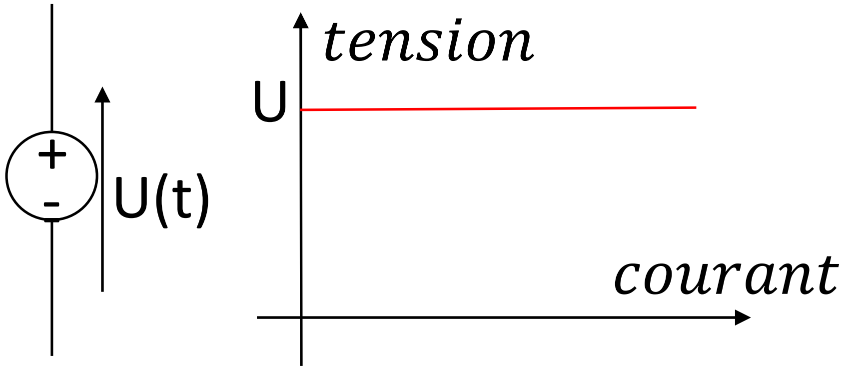
- Notons que l'amplitude de complexe $\underline{U_m}$ contient simultanément les informations d'amplitude $\mathrm{U_{max}}$ et de phase φ de signal physique réel.

- **Les éléments actifs**

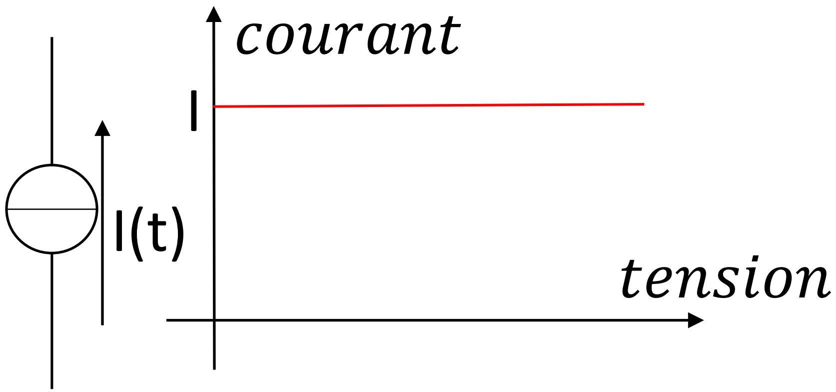
Les éléments actifs produisent les signaux dans un circuit électrique

- **Les sources idéales indépendantes**
  - On appelle source de tension idéale tout dispositif qui fournit une tension imposée à une valeur U, indépendamment du courant I.
  - Une source de courant idéale impose un courant I pénétrant et sortant par ses bornes quelle que soit la tension qui lui est appliquée.

Source de tension

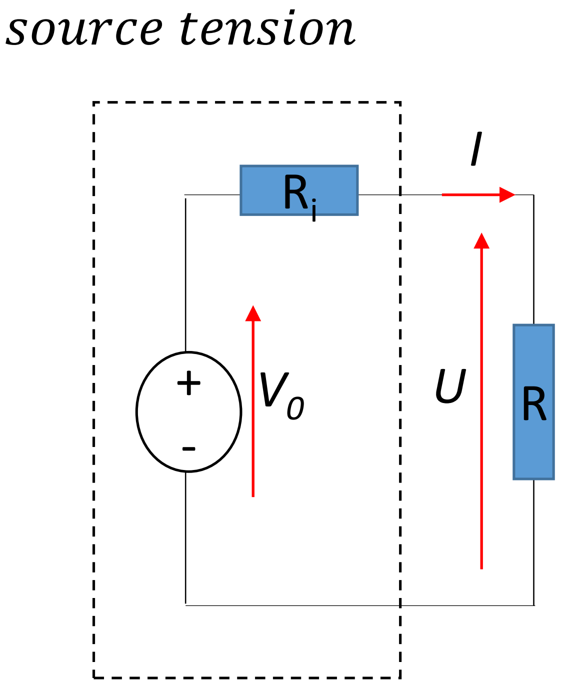


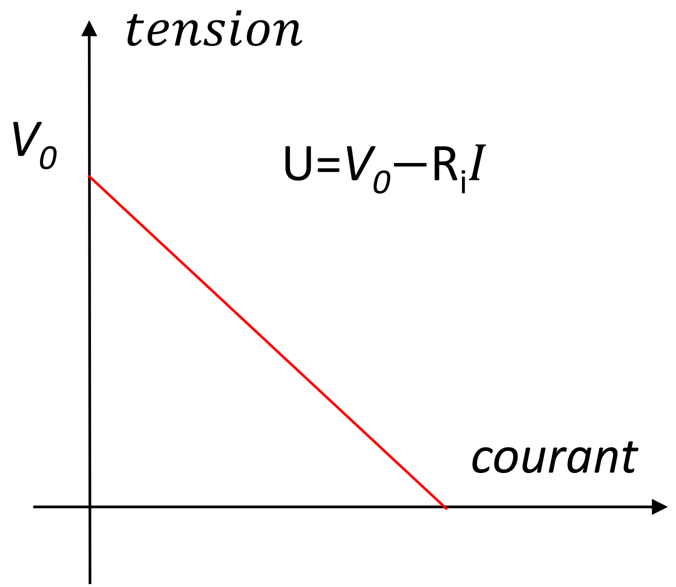
Source de courant



- **Source de tension réelle**

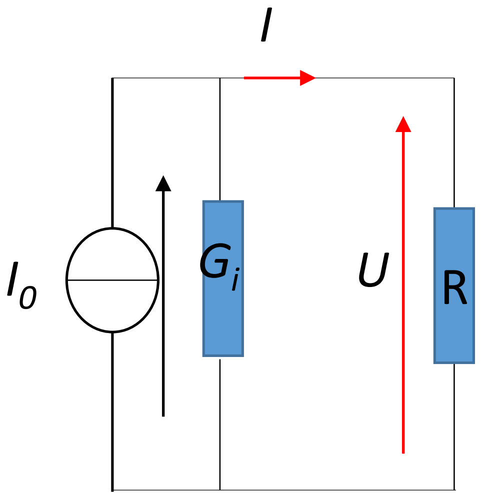
Une source de tension réelle peut se représenter schématiquement comme une source de tension V_0 idéale et d'une résistance R_i représentant la Résistance interne des éléments constituant la source

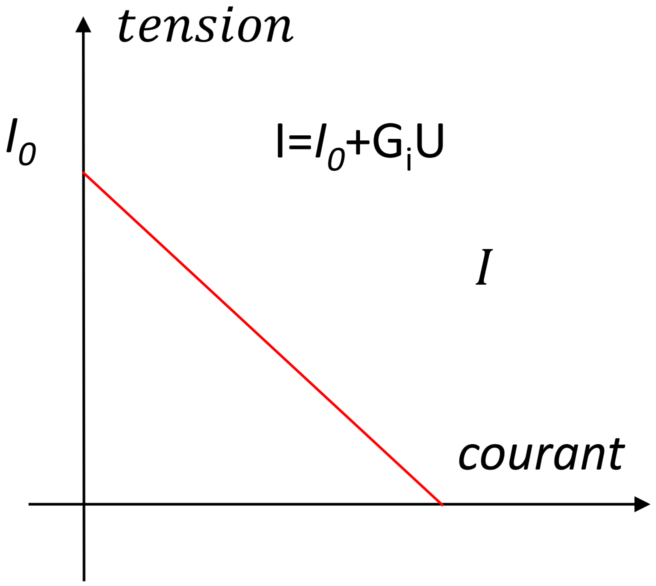




- **Source de courant réelle**

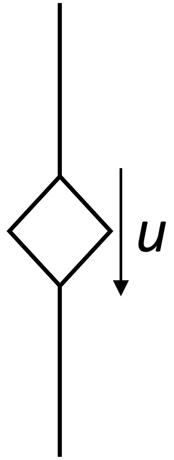
le courant débité Par Une source de courant réelle diminue lorsque la tension à ses bornes croît. Pour tenir compte de cette chute une résistance interne Ri est introduite dans le modèle idéal (notée sous forme d'une conductance Gi).



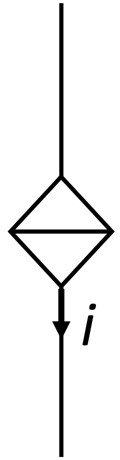


- **Les sources dépendantes**
  - On appelle source dépendante une source de tension ou de courant qui est dépendante d'une grandeur, courant ou tension, caractérisant un autre élément du réseau. A titre d'exemple, on peut définir une source de tension dépendante $u(t) = \alpha i(t)$ où $i(t)$ est le courant qui circule dans un autre élément du réseau
  - Si la relation de dépendance est linéaire on dit que la source est linéaire

Source de tension

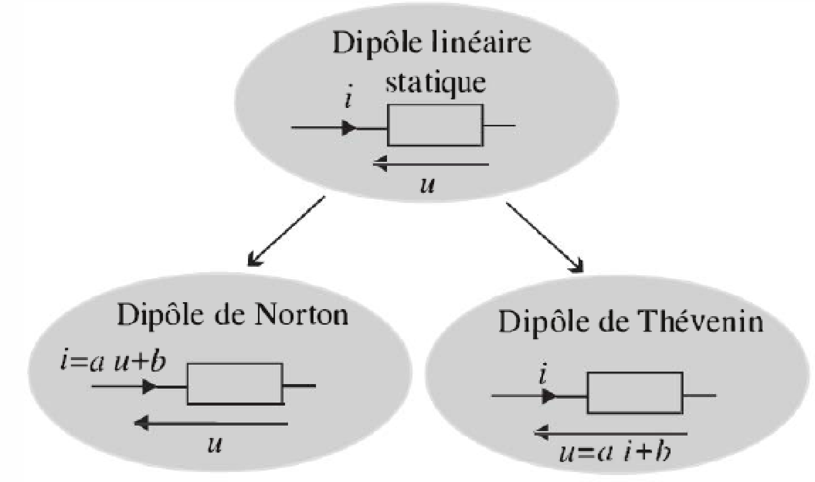


Source de courant



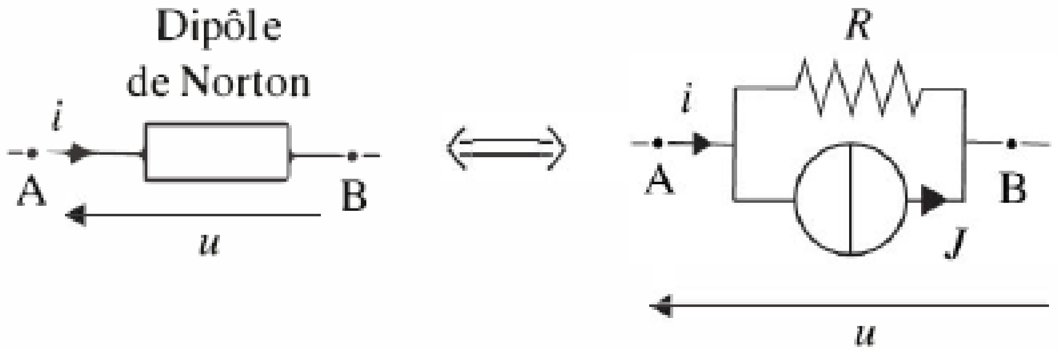
- **Modèle linéaire statique**

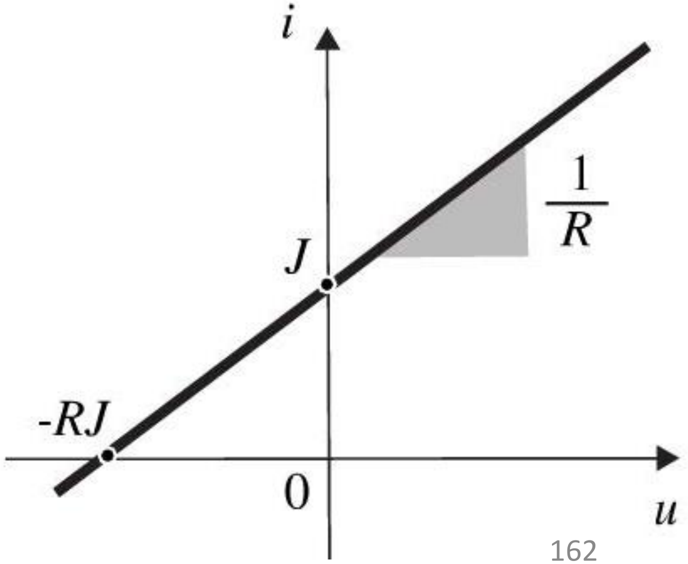
La réalisation d'une approximation linéaire assimile la caractéristique graphique d'un composant à une droite sur son domaine de fonctionnement.



- **Dipôle de Norton**

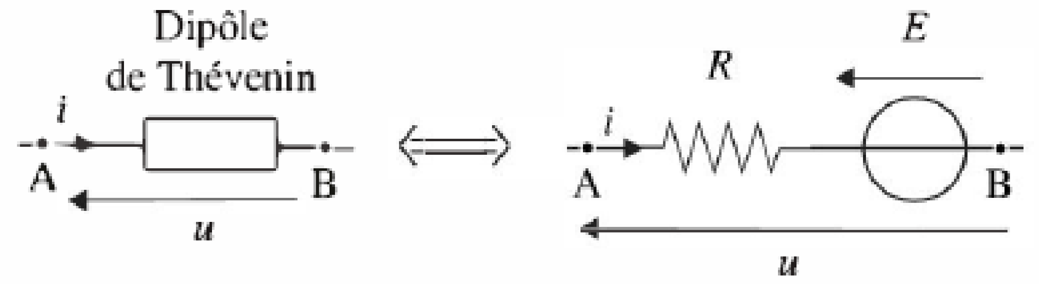
Un modèle équivalent de Norton est constitué de l'association parallèle d'une source de courant et d'un résistance R

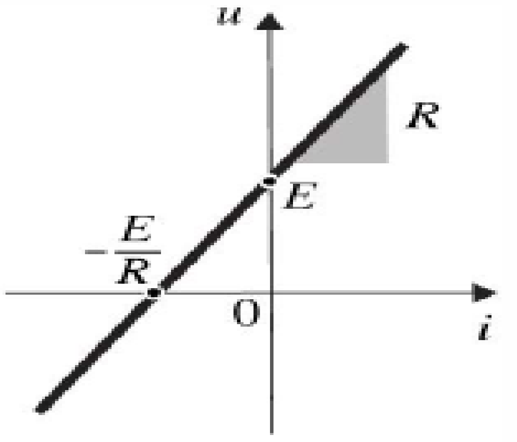




- **Dipôle de Thévenin**

Un modèle équivalent de Thévenin est constitué de l'association série d'une source de tension de force électromotrice E et d'une résistance R



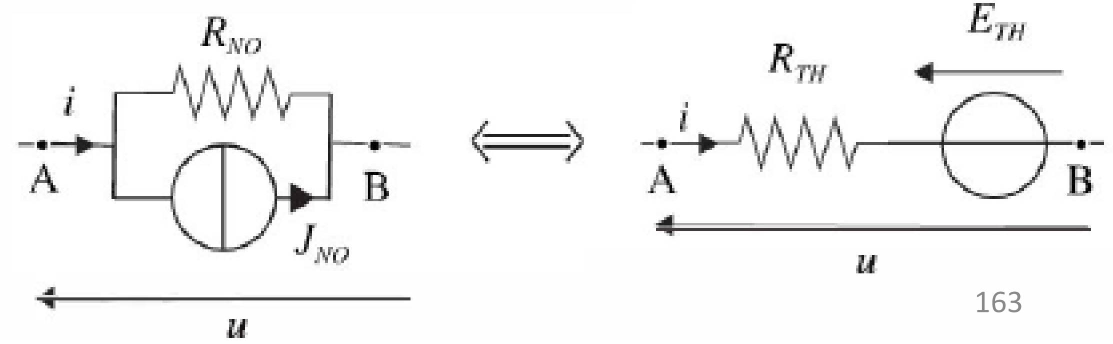


- **Équivalence entre modèles**

il existe des relations d'équivalence entre les deux modèles.

  - L'équivalence entre les deux dipôles doit porter en particulier sur les tensions à vide et les courants de court-circuit

$R_{No} = R_{TH} = R$ et $-J_{No}R = E_{TH}$



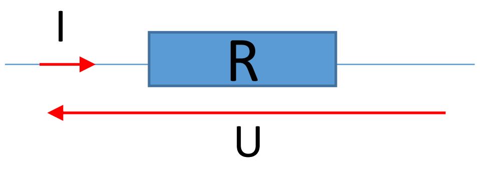
- **Les dipôles passifs**

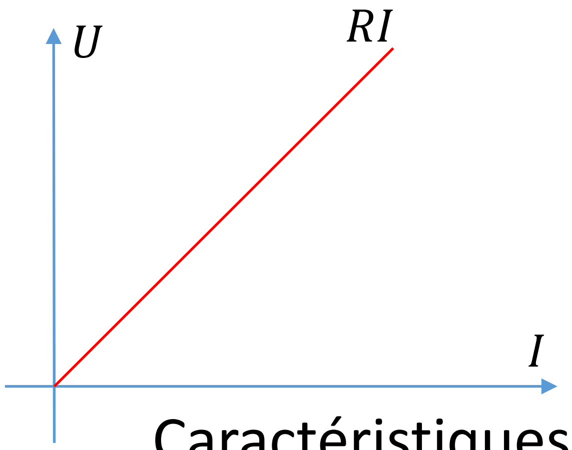
Les éléments passifs subissent le signal et réagissent en fonction de leur caractéristique.

- **Les Résistances**:

L'énergie fournie à une résistance est consommée et dissipée sous forme de chaleur. Une résistance agit toujours comme un récepteur (puissance absorbée).

Loi d'Ohm : $U = RI$

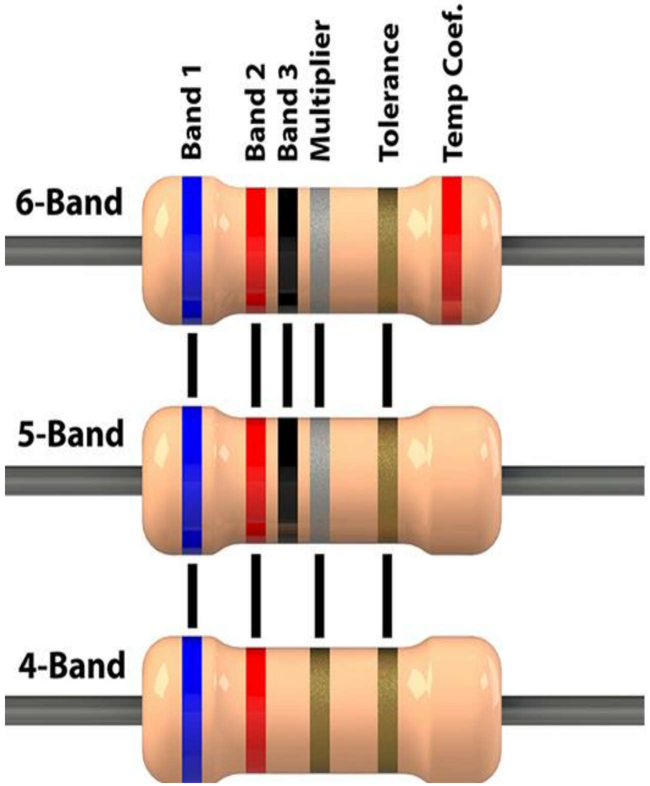




Caractéristiques tension-courant

- # Code couleur des résistances

Resistor Color Codes								NightShade Electronics ns-electric.com			
Band Color			**Value**			**Multiplier**		**Tolerance**		**Temp. Coef.**	
Name	**Code**	**Color**	**Band 1**	**Band 2**	**Band 3**			**Percent**	**Letter**	**ppm/K**	**Letter**
Black	BK		0	0	0	$x10^0$	x1	-	-	250	U
Brown	BN		1	1	1	$x10^1$	x10	±1%	F	100	S
Red	RD		2	2	2	$x10^2$	x100	±2%	G	50	R
Orange	OG		3	3	3	$x10^3$	x1,000	-	-	15	P
Yellow	YE		4	4	4	$x10^4$	x10,000	-	-	25	Q
Green	GN		5	5	5	$x10^5$	x100,000	±0.5%	D	20	Z
Blue	BU		6	6	6	$x10^6$	x1,000,000	±0.25%	C	10	Z
Violet	VT		7	7	7	$x10^7$	x10,000,000	±0.1%	B	5	M
Gray	GY		8	8	8	$x10^8$	x100,000,000	±0.05%	A	1	K
White	WH		9	9	9	$x10^9$	x1,000,000,000	-	-	-	-
Gold	GD		-	-	-	$x10^{-1}$	x0.1	±5%	J	-	-
Silver	SR		-	-	-	$x10^{-2}$	x0.01	±10%	K	-	-
Pink	PK		-	-	-	$x10^{-3}$	x0.001	-	-	-	-
None	-	-	-	-	-	-	-	±20%	M	-	-

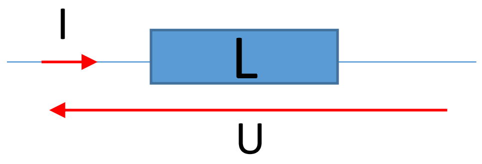


- **Les Bobines:**
  - Le passage d'un courant électrique *I* dans une bobine crée un flux magnétique Φ . La loi de Lenz montre que la tension aux bornes de la bobine impose les variations du flux et vice versa.

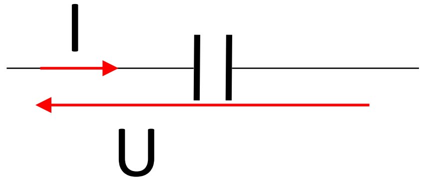
$$\Phi = \mathrm{LI} \;\; \text{avec} \begin{cases} \Phi\text{: le flux en Weber (Wb)} \\ \mathrm{L}\text{: l'inductance en Henry(H)} \\ \mathrm{I}\text{: le courant en Ampère (A)} \end{cases}$$

  - Relation U-I

$$\mathrm{U} = \frac{d\Phi}{dt} = \mathrm{L}\frac{dI}{dt}$$



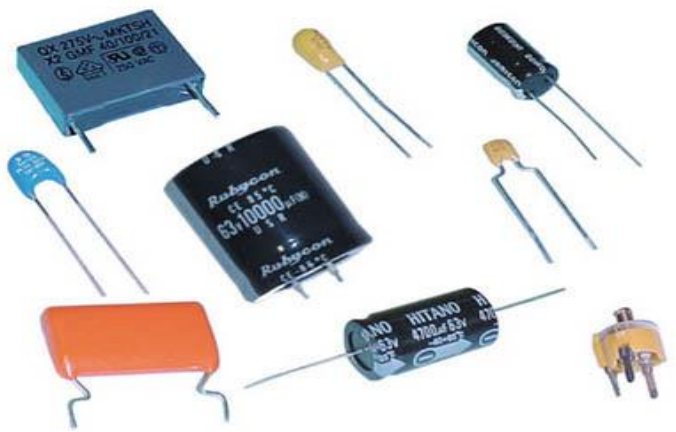
- **Les condensateurs :**
  - Un condensateur constitué de deux plaques conductrices séparées par un diélectrique et soumises à une tension *U(t),* fait apparaître une charge *q(t)* à ses bornes, donnée par :



$$q(t) = C.U$$

le courant est donné par :

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dU(t)}{dt}$$



- **Notion d'impédance**

L'impédance est une généralisation de la notion de résistance. Elle représente la faculté du composant à s'opposer au passage du courant (résistance), mais également à créer un champ magnétique lors du passage d'un courant (inductance) ou à stocker les charges électriques (capacité).

$$\mathrm{U} = \mathrm{ZI}$$

Si $\begin{cases} \mathrm{U(t)} = \mathrm{U_{max}} e^{j(\omega t+\varphi)} \\ \mathrm{I(t)} = \mathrm{I_{max}} e^{j(\omega t+\psi)} \end{cases} \Rightarrow \quad \mathrm{Z} = \dfrac{\mathrm{U_{max}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}}{\mathrm{I_{max}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}} = \dfrac{\mathrm{U_{max}}}{\mathrm{I_{max}}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi-\psi)}$

- **Notion d'admittance**

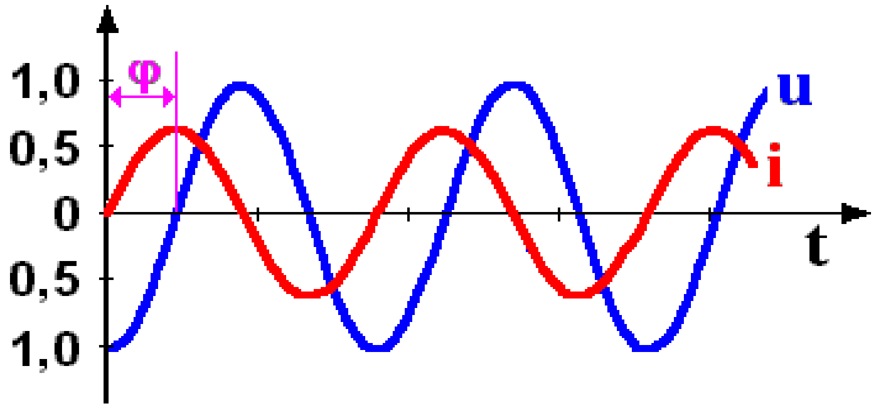
On définit l'admittance d'un dipôle comme étant l'inverse de l'impédance

$$\mathrm{Y} = \frac{1}{Z}$$

- **Comportement des éléments passifs**
  - **Résistance**

    Z=R : Dans le cas d'une résistance pure, l'impédance est un nombre réel
  - **Condensateur**

    $Z = \frac{1}{jC\omega}$ l'impédance est complexe est dépend de la fréquence

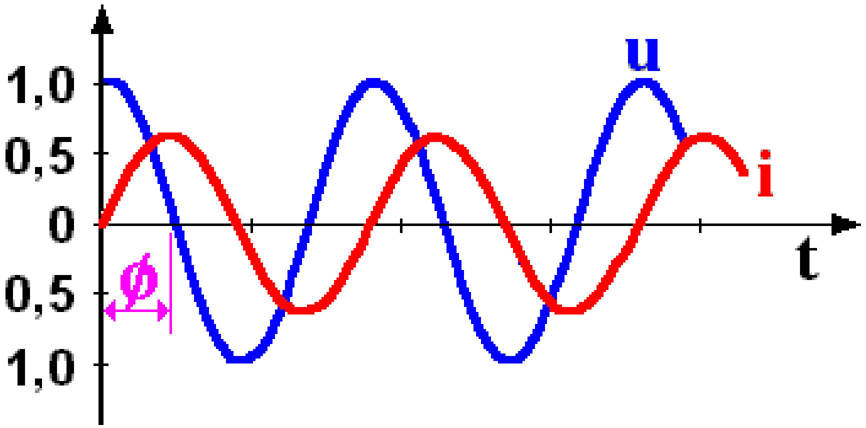


Le déphasage est de 90°, Le courant dans le condensateur est en avance sur la tension à ses bornes

    - Pour des signaux continus le condensateur se comporte comme un circuit ouvert
    - Pour les hautes fréquences le condensateur se comporte comme un court-circuit

- **Bobine**

  $Z = jL\omega$ l'impédance est complexe est dépend de la fréquence

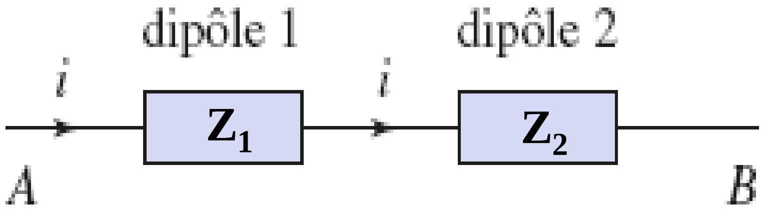


Le déphasage aux borne d'une bobine est de 90°, le courant dans la bobine est en retard sur la tension à ses.

  - Pour des signaux continus la bobine se comporte comme un court-circuit
  - Pour les hautes fréquence la bobine se comporte comme circuit ouvert

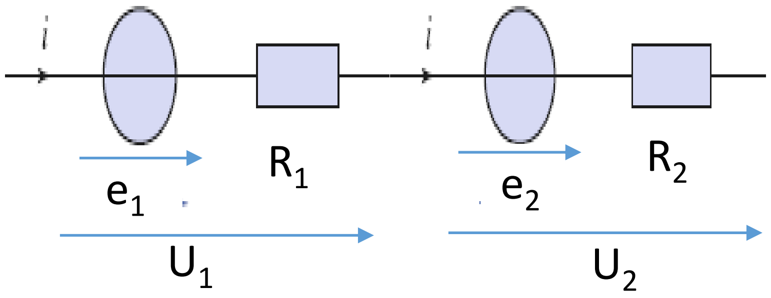
- **Association en série des dipôles passifs**

L'impédance équivalente est : $Z = \sum_n Z_n$



- **Association en série de générateurs réels**

Le générateurs équivalent est:



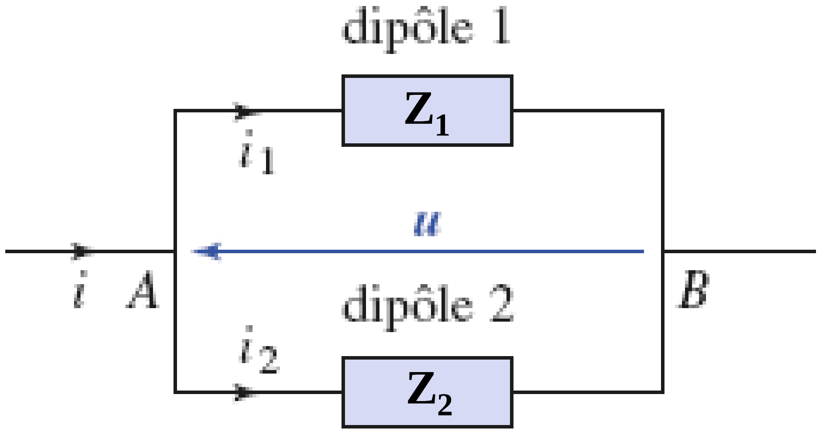
$$U = U_1 + U_2 = e - Ri$$

avec $\mathrm{e} = \sum_n \varepsilon_n e_n$ et $\mathrm{R} = \sum_n R_n$

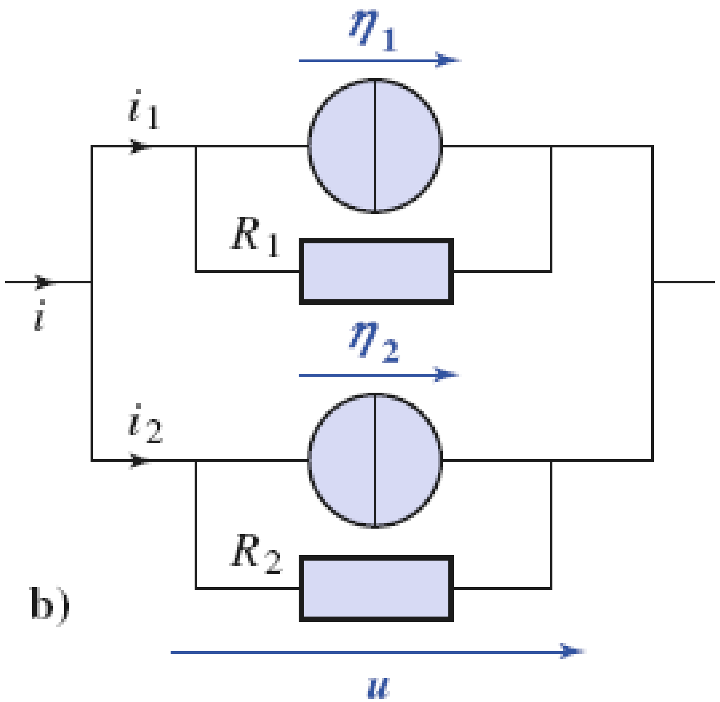
ε_n=1 si l'orientation de ε_n est identique à celle de *i* et
ε_n=-1 dans le cas contraire.

- **Association en parallèle des dipôles passifs**

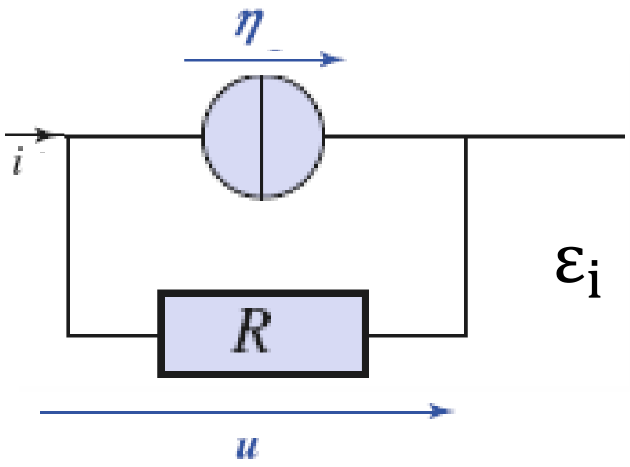
$$\frac{1}{Z} = \sum_n \frac{1}{Z_n}$$



- **Association en parallèle de générateurs réels**
  - la représentation par un générateur de Norton est préférable.



$$i = \eta - \frac{u}{R}\text{, avec } \eta = \sum_i \varepsilon_i \eta_i \text{ et } \frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$



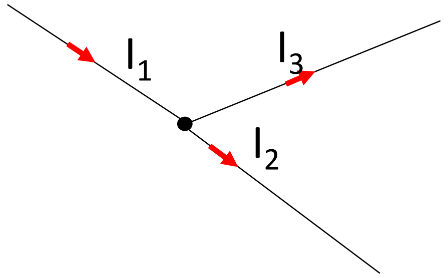
$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 \text{ si i et } \eta_i \text{ même sens} \\ -1 \text{ si i et } \eta_i \text{ sens opposé} \end{cases}$$

- **Analyse des réseaux électriques**
  - **Lois de Kirchhoff**

  Ces lois, au nombre de deux, expriment la conservation de l'énergie et de la charge dans un circuit électrique.
    - **Loi des nœuds**

    La somme des intensités des courants entrants dans un nœud est égale à la somme des intensités des courants sortants du nœud.

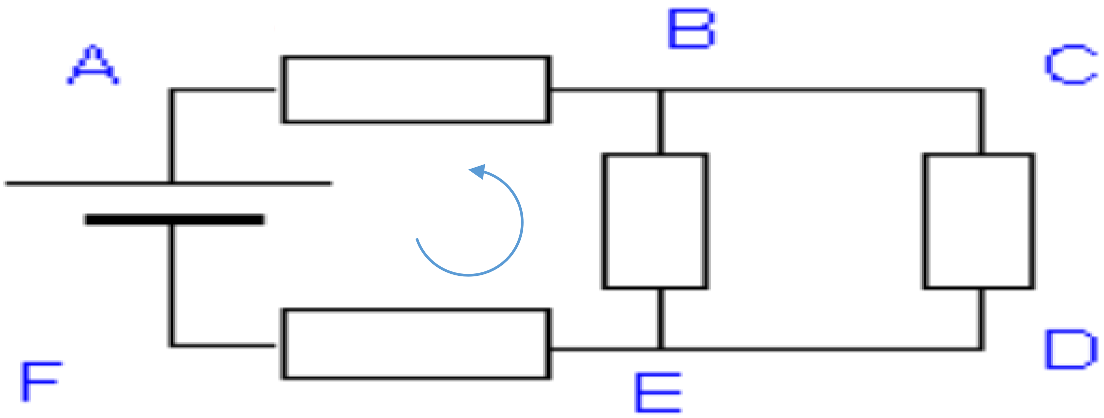
$$I_1 = I_2 + I_3$$



- **Loi des mailles**

la somme algébrique des tensions le long de la maille est constamment nulle.

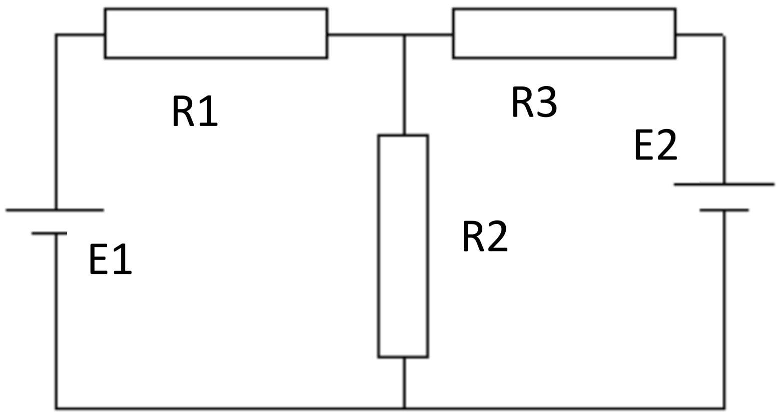
  - On procède de la manière suivante :
    - On choisit, sur chaque branche, un sens du courant arbitraire (ou des tensions).
    - On choisit un sens de parcours de la maille arbitraire.



- **Théorème de superposition**

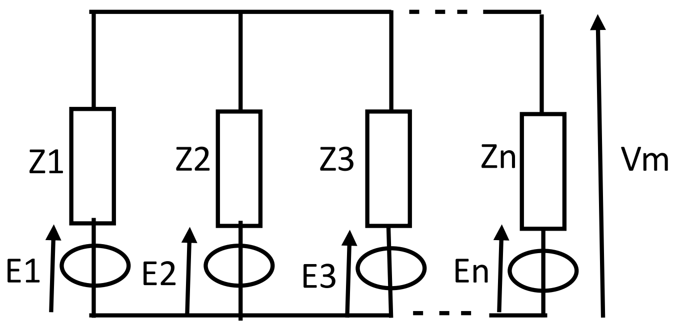
Dans un circuit linéaire, le courant produit par plusieurs générateurs est égale à la somme algébrique des courants créés par chacun des générateurs dans cette branche, les autres générateurs étant remplacés par leur résistance interne.

Exemple : calculez le courant dans chaque branches

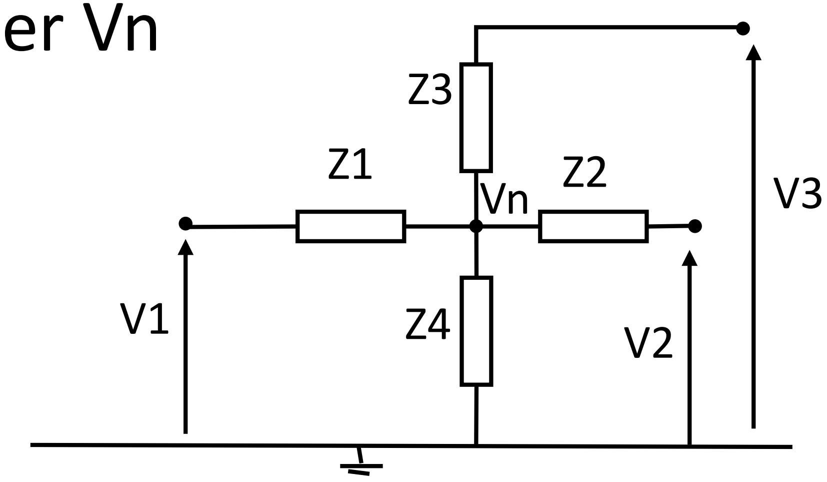


- **Théorème de Millman**
  - Le théorème de Millman s'applique à un circuit électrique constitué de n branches en parallèle. Chacune de ces branches comprenant un générateur de tension parfait en série avec un élément linéaire.

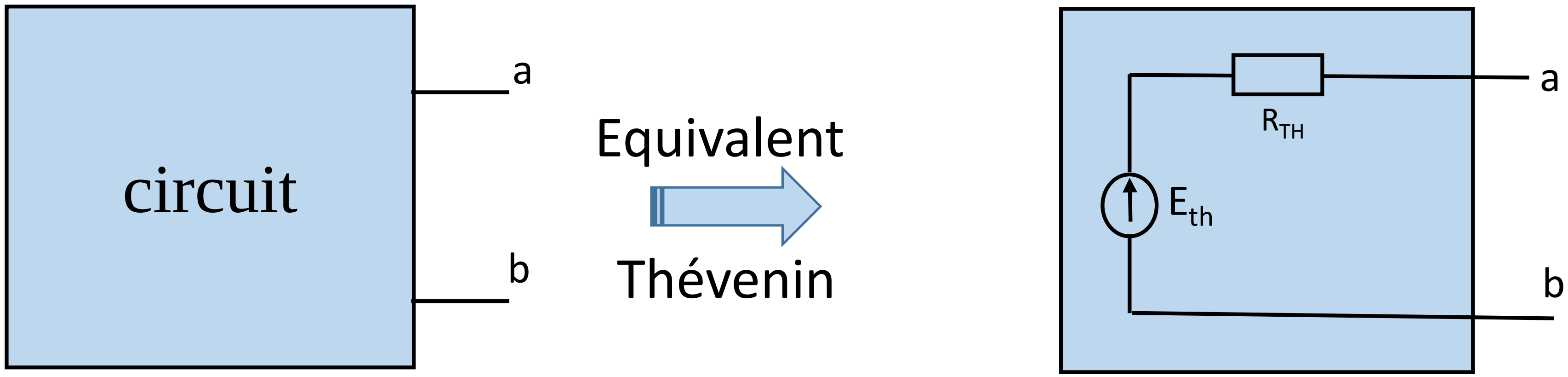
$$V_m = \frac{\sum E_i Y_i}{\sum Y_i}$$



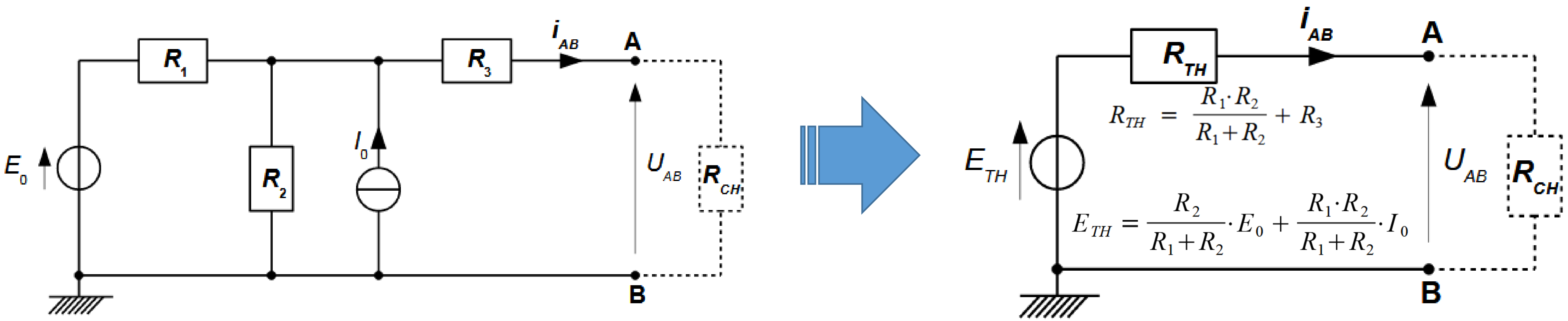
  - Exemple : calculer Vn



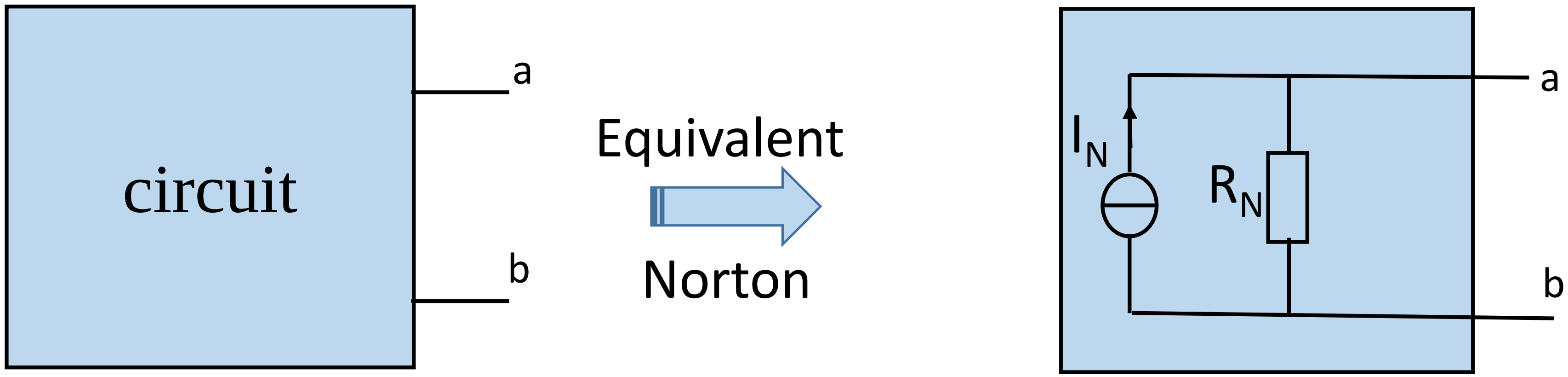
- **Théorème de Thévenin**
  - Permet de remplacer une partie d'un réseau par un générateur de tension qui lui est électriquement équivalent, de manière à simplifier les calculs ultérieurs.
  - Entre deux nœuds *A* et *B* un circuit peut se réduire à une f.é.m. E_{th} en série avec une impédance Z_{th} , d’où un simple diviseur de tension.



- **Démarche**
  1. Pour calculer l'impédance interne du générateur R_{th}, on court-circuite les générateurs de tension et on ouvre les générateurs de courant (les éteindre). On ne conserve que les éléments passifs du réseau: chaque générateur indépendant est remplacé par sa résistance interne.
  2. la f.é.m. E_{th} serait égale à la tension U_{AB} à vide entre les deux nœuds,
- **Exemple** : calculer les éléments du générateur de Norton équivalent



- **Théorème de Norton**
  - permet de remplacer une partie d'un réseau par un générateur de courant qui lui est électriquement équivalent, de manière à simplifier les calculs ultérieurs.
  - Entre deux nœuds *A* et *B* un circuit peut se réduire à une source de courant I_N en parallèle avec son impédance Z_N , d’où un simple diviseur de courant.

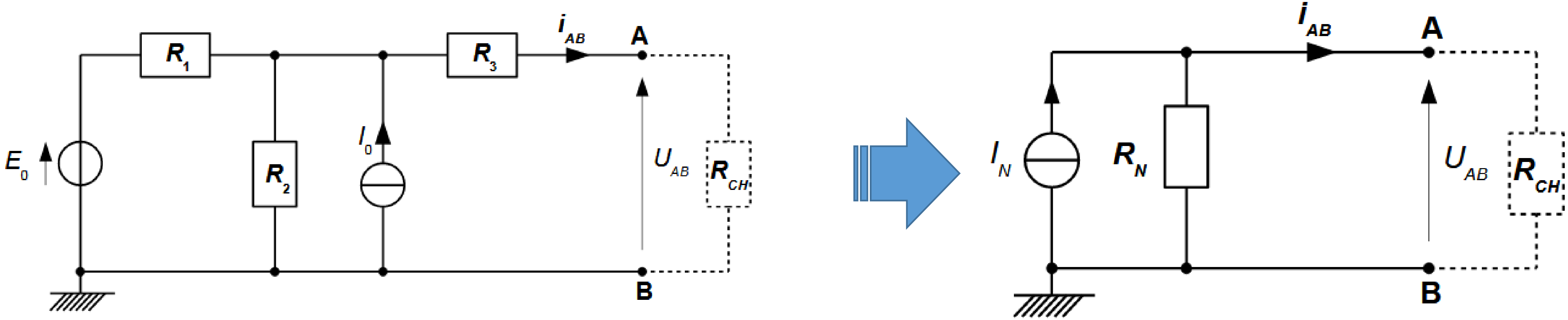


1. L'intensité I_N du générateur est égale au courant de court-circuit entre A et B quand la charge est débranchée.
2. L'impédance Z_N est égale à l'impédance mesurée entre A et B quand le dipôle de charge est débranché et que les générateurs sont remplacés par leurs résistances internes. En pratique il suffit d'éteindre les sources indépendantes de tension et de courant, sachant que :

- Eteindre une source de tension revient à la remplacer par un fil
- Eteindre une source de courant revient à la remplacer par un interrupteur ouvert

- **Exemple**

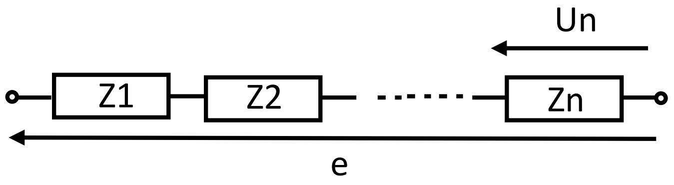
calculer les éléments du générateur de Norton équivalent



$$I_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \cdot I_0 + \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \cdot E_0$$

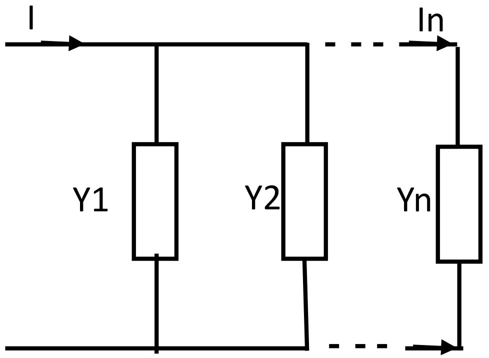
$$R_N = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3$$

- Diviseur de tension et de courant



$$Un = \frac{e\,Zn}{Z1 + Z2 + \cdots + Zn}$$

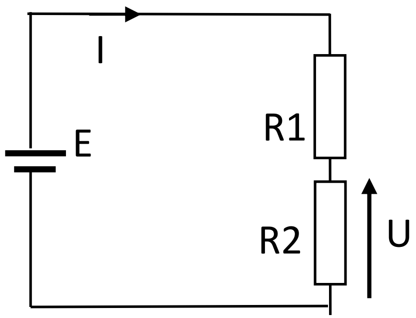
Diviseur de tension

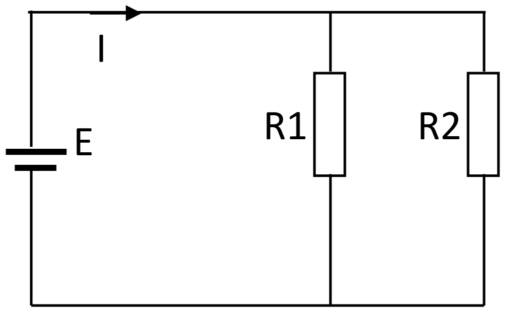


$$In = \frac{I\,Yn}{Y1 + Y2 + \cdots + Yn}$$

Diviseur de courant

- Exemple





Electrostatique
&
Electrocinétique

-SPMC-

M.ROCHDI