1 Les variables aléatoires réelles discrètes

Exercice 1 — On lance 2 dés et on appelle X la v.a.r. égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus. Déterminer la loi de X, sa fonction de répartition, son espérance et sa variance.

Exercice 2 ———

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement 5 boules. Soit B le nombre de boules blanches et N le nombre de boules noires.

1. On suppose que les tirages sont sans remise.
   Déterminer la loi de B (resp. N) puis calculer $E(B), V(B)$ (resp. $E(N), V(N)$).
   Les variables B et N sont-elles indépendantes ?
2. Répondre aux questions précédentes lorsque les tirages sont avec remise.

Exercice 3 ——— Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'un retard se produise dans le dépannage à la suite d'un appel est $p = \frac{1}{4}$.

1. Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subi. Définir la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. On considère un ensemble de 8 clients différents. 2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit M le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés. Définir la loi de M. La donner explicitement. Calculer $E(M)$.

Exercice 4 ——— La probabilité pour qu'un tireur atteigne une cible est $\frac{1}{4}$.

1. Sachant qu'il tire 7 fois, quelle est la probabilité pour qu'il atteigne la cible au moins deux fois ?
2. Combien de fois doit-il tirer pour que la probabilité d'atteindre au moins une fois la cible soit plus grande que $\frac{2}{3}$?

Exercice 5 ——— Une entreprise possède 50 ordinateurs. La probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est de $0,01$. On suppose que le fonctionnement d'un ordinateur est indépendant des autres. On note X la v.a.r donnant le nombre d'ordinateurs en panne parmi les 50 disponibles.

1. Peut-on approximer la loi de X par celle de Poisson ?
2. Calculer la probabilité qu'aucun ordinateur ne tombe en panne.
3. Calculer la probabilité que 5 ordinateurs soient en panne.
4. Calculer la probabilité de l'événement $E =$ " au moins un ordinateur est en panne".
5. Calculer $p(X = 3)$, $p(X \leq 3)$ et $E(X)$.

Exercice 6 On suppose que dans un livre de 500 pages, 300 erreurs d'impression sont distribuées au hasard. Calculer la probabilité pour qu'une page donnée contienne
(i) aucune erreur, **(ii)** une erreur, **(iii)** deux erreurs, **(iv)** deux erreurs au plus.

2 Les variables aléatoires réelles continues

Exercice 7 La quantité de pain (en centaines de kilos) qu'une boulangerie vend en 1 journée est une v.a.r X de fonction de densité :

$$f(t) = \begin{cases} ct; & 0 \leq t \leq 3, \\ c(6-t); & 3 \leq t \leq 6, \\ 0; & sinon. \end{cases}$$

1. Calculer la valeur de c puis déterminer F la fonction de répartition de X.
2. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?
   $A =$ "le nombre de kilos de pain vendus dans une journée est supérieur à $300kg$ "
   $B =$ "le nombre de kilos de pain vendus dans une journée est compris entre 150 et $450kg$".

Exercice 8 ___ La durée du processus d'atterrissage d'un avion dans un aéroport, mesurée en minute, est une v.a.r T de densité :

$$f(t) = \begin{cases} 0; & t < 0, \\ \lambda^2 t e^{-\lambda t}; & t \geq 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité pour $\lambda > 0$, puis calculer $E(T)$ et $V(T)$.
2. Supposons dorénavant que $E(T) = 2$. Calculer λ.
3. Calculer les probabilités des événements $(T > 2)$ et $(1 < T < 3)$ sachant que $(T < 4)$.

Exercice 9 ______________ On remplit un verre de volume 20 cl d'une quantité d'eau choisie entre 0 et $20cl$:

1. Quelle est la probabilité d'obtenir moins de $5cl$ d'eau ?
2. On vide 5 verres ainsi remplis dans une très grande bassine. Quelle quantité moyenne d'eau obtient-on dans la bassine ?

Exercice 10 _______ La durée de vie X en années d'une télévision suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{8}$.

1. Calculer la probabilité d'acheter la télévision de durée de vie supérieure à 8 ans.
2. Vous possédez une telle télévision depuis 2 ans. Quelle est la probabilité que sa durée de vie soit encore de 8 ans à partir de maintenant ? Conclusion.
3. Quelle est la durée de vie moyenne $E(X)$ d'une télévision ? Et la variance $V(X)$ de cette durée de vie ?

Exercice 11 Soit X une v.a.r suivant la loi normal centrée réduite. Calculer la valeur de t dans chaque cas : **(i)** $p(0 \leq X \leq t) = 0,4236$, **(ii)** $p(X \leq t) = 0,7967$, **(iii)** $p(0 \leq X \leq t) = 0,1000$.

Exercice 12 ______ Un ascenseur supporte une charge de $800kg$. Le poids des utilisateurs est distribué selon la loi normale de paramètres $\mu = 80kg$ et $\sigma = 20kg$. Quel est le nombre maximum de personnes que l'on peut autoriser à monter simultanément pour que la probabilité de surcharge ne dépasse pas 0.001 ?

Exercice 13 ___La longueur des pièces produites par une machine de type A varie selon une loi normale avec espérance $8mm$ et variance $4mm$, et la longueur de celles produites par une machine de type B varie selon une loi normale avec espérance $7,5mm$ et variance $1mm$.

1. Si vous voulez produire des pièces de longueurs $8 \pm 1mm$, quel type de machine choisiriez-vous ?
2. Si la moyenne des longueurs produites par la machine A reste $8mm$, quelle doit être sa variance pour qu'elle ait la même performance que la machine B ?

Exercice 14 __ Sur une autoroute, la proportion des camions par rapport à l'ensemble des véhicules est 0.07.

1. Soit X le nombre de camions parmi 100 véhicules choisis au hasard. Calculer $p(X \geq 5)$
2. Soit Y le nombre de camions parmi 1000 véhicules choisis au hasard. Calculer $p(65 \leq Y \leq 75)$
3. On choisit n véhicules au hasard. Pour quelles valeurs de n peut-on affirmer que la proportion de camions est entre 0.06 et 0.08 avec un risque d'erreur inférieur à 5% ?